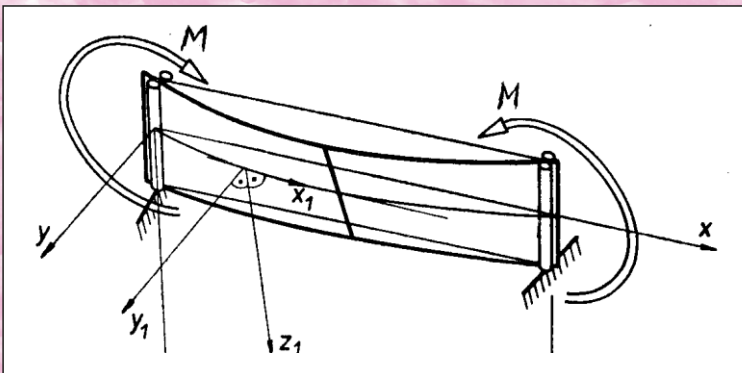




Jaroslav Menčík

Úvod do aplikované mechaniky tenkostěnných konstrukcí



Jaroslav Menčík

Úvod do aplikované mechaniky tenkostěnných konstrukcí

Univerzita Pardubice, 2020

Tato publikace neprošla jazykovou korekturou.

Recenzenti:

Prof. Dr. Ing. Libor Beneš
Doc. Ing. Iva Petříková, PhD.

© prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc., 2020

ISBN 978-80-7560-297-8 (tištěná verze)

ISBN 978-80-7560-298-5 (elektronická verze)

Elektronická verze je volně přístupná na <https://eshop.upce.cz/epub/9006160/>

Úvod do aplikované mechaniky tenkostěnných konstrukcí

Pro mnoho součástí a konstrukcí je důležitá nízká hmotnost. Řešení nabízejí tenkostěnné konstrukce. Tato kniha shrnuje základní teoretické poznatky i praktické postupy pro jejich navrhování. V úvodní kapitole jsou zopakovány partie z pružnosti a pevnosti, týkající se kroucení a ohybu prutů a nosníků. Kapitola druhá je věnována tzv. stísněnému kroucení. Třetí kapitola ukazuje typické rysy napjatosti hlavních typů těles vyskytujících se u tenkostěnných konstrukcí: desek, membrán a skořepin. Uvádí i základní vztahy pro výpočty jejich deformací a napětí. Protože tenkostěnné součásti často selžou zborcením, je kapitola čtvrtá věnována různým případům ztráty stability prutů, desek a skořepin. Pátá kapitola probírá odezvu tenkostěnných a štíhlých součástí při změně teploty. Poslední kapitola si všímá navrhování těchto součástí a konstrukcí, a uvádí i jednoduché příklady. I když se tenkostěnné konstrukce dnes navrhují pomocí vhodného software, dává kniha přednost jednoduchým analytickým vztahům, které názorně ukazují vzájemné souvislosti a vliv hlavních veličin. Část poslední kapitoly je věnována obecným otázkám zajišťování spolehlivosti, včetně přístupů simulačních a pravděpodobnostních, jako je metoda Monte Carlo. Kniha obsahuje četné ilustrace, řešené příklady a soupis odborné literatury.

Introduction to applied mechanics of thin-walled constructions

Low weight is important for many components and structures. Thin-walled constructions offer solutions. This book summarizes the basic theoretical knowledge and practical procedures for design. In the introductory chapter, the parts of elasticity and strength, related to the torsion and bending of bars and beams, are repeated. The second chapter is devoted to the so-called constrained torsion. The third chapter shows the typical features of the stresses in the main types of bodies occurring in thin-walled structures: plates, membranes and shells. It also presents the basic relations for the calculations of their deformations and stresses. Because thin-walled components often fail by collapse, the fourth chapter is devoted to various cases of loss of stability of bars, plates and shells. The fifth chapter discusses the response of thin-walled and slender components when the temperature changes. The last, sixth chapter, pays attention to the practical issues of creating thin-walled components and structures, including examples of their design. Although thin-walled structures are now designed using appropriate software, the book prefers simple analytical relationships that clearly show the influence of the main quantities. Part of the last chapter is devoted to general issues of reliability, including probabilistic and simulation approaches, such as the Monte Carlo method. The book contains numerous illustrations, solved examples and a list of references.

OBSAH

Předmluva	7
1. Místo úvodu – opakování: krut a ohyb	9
1.1 Krut	9
1.2 Ohyb	17
2. Stísněné kroucení	30
3. Desky, membrány a skořepiny	35
3.1 Tenké desky	35
3.2 Ortotropní desky	38
3.3 Sendvičové prvky	39
3.4 Membrány a tenkostěnné skořepiny	42
3.5 Membránová napjatost, Laplaceova rovnice	43
3.6 Tenkostěnná válcová tlaková nádoba	44
3.7 Tenkostěnné rotačně symetrické nádoby	46
3.8 Tenkostěnná kulová tlaková nádoba	47
3.9 Membránová a ohybová napětí v rotačních skořepinách	48
3.10 Rotačně symetrická ohybová napjatost ve válcové skořepině	49
4. Ztráta stability štíhlých a tenkostěnných částí	58
4.1. Štíhlé pruty zatížené osovou tlakovou silou	59
4.2. Stabilita tenkých nosníků s příčným zatížením	65
4.3 Ztráta stability účinkem smykových napětí	67
4.4 Ztráta stability desek	68
4.5 Stabilita válcových skořepin	73
4.6 Použití výztužných žeber	79
4.7 Kritický vnější tlak pro kulovou skořepinu	80
4.8 Pokritické chování prutů, desek a skořepin	80
4.9 Řešení stabilitních problémů metodou konečných prvků	81

5. Teplotní napětí v tenkostěnných prvcích	85
5.1 Dlouhá tyč při změně teploty	85
5.2 Dlouhá tyč se spádem teplot napříč tloušťkou	86
5.3 Kruhová deska při změně teploty	87
5.4 Obdélníková deska se spádem teplot napříč tloušťkou	88
5.5 Tenký kruhový disk s teplejší centrální oblastí	89
5.6 Tenkostěnná válcová trubka při změně teploty	91
6. Navrhování tenkostěnných konstrukcí	95
6.1 Konstrukční řešení	95
6.2 Využití podobnosti a bezrozměrových veličin při návrhu	101
6.3 Pravděpodobnostní hlediska navrhování konstrukcí	104
6.4 Vliv rozměrů	108
6.5 Počítačová podpora navrhování	109
Rejstřík	116

Předmluva

U mnoha součástí a konstrukcí je důležitým požadavkem co nejnižší hmotnost. Platí to pro letadla, automobily a další dopravní prostředky, ale i pro mnoho jiných výrobků. Jedním z řešení je použití tenkostěnných konstrukcí. V této oblasti bylo v průběhu doby získáno mnoho teoretických i praktických poznatků, a byly vypracovány postupy analýzy i navrhování.

Tato stručná kniha chce usnadnit práci konstruktérům a projektantům s menšími zkušenostmi. V šesti kapitolách shrnuje základní teoretické poznatky a praktické postupy pro navrhování tenkostěnných konstrukcí. Nejprve jsou stručně zopakovány partie z elementární pružnosti a pevnosti, týkající se ohybu a kroucení prutů a nosníků. Kapitola druhá je věnována tzv. stísněnému kroucení. Třetí kapitola ukazuje charakteristické rysy napjatosti těles tvořících většinu tenkostěnných konstrukcí: desky, membrány a skořepiny. Uvádí i základní vztahy pro jejich deformace a napětí. Protože tenkostěnné součásti často selžou zborcením, je kapitola čtvrtá věnována různým případům ztráty stability prutů, desek a skořepin. Pátá kapitola se zabývá odezvou tenkostěnných součástí při změně teploty. V poslední kapitole se probírají praktické otázky vytváření tenkostěnných součástí a konstrukcí. Cílem je ukázat na jednoduchých příkladech, jak lze vytvářet váhově úsporné prvky.

I když odezva a únosnost tenkostěnných konstrukcí se dnes řeší hlavně pomocí vhodného software, o kterém je v knize také zmínka, je zde dáována přednost jednoduchým analytickým vztahům, ze kterých jsou názorně vidět vzájemné souvislosti a vliv hlavních veličin. Tam, kde to bylo možné, jsou použity vzorce v bezrozměrovém tvaru, aby vynikla užitečnost tohoto přístupu. Protože konečným cílem návrhu je vytvoření spolehlivé konstrukce, je část poslední kapitoly věnována obecným otázkám zajišťování spolehlivosti, včetně některých přístupů pravděpodobnostních a simulačních, jako je metoda Monte Carlo.

Kniha obsahuje četné ilustrace i několik řešených příkladů. Při četbě je znalost středoškolské matematiky a základů integrálního počtu výhodou, není však nezbytná. Jednotlivé kapitoly jsou doplněny soupisem odborné literatury.

Poděkování

Autor upřímně děkuje za podrobné pročtení rukopisu, připomínky a upozornění na chyby oběma recenzentům, kterými byli:

Docentka Ing. Iva Petříková, PhD., z Technické univerzity v Liberci, a
Profesor Dr. Ing. Libor Beneš z ČVUT v Praze.

1. Místo úvodu – opakování: krut a ohyb

Konstruktor, který navrhuje součásti nebo konstrukce mechanicky zatížené, by měl chápat, co se v materiálu a konstrukcích děje při zatížení. Aby například u nějakého návrhu uměl již na první pohled říci „tohle prostě není možné“. Předpokládáme, že čtenář absolvoval základní kurs pružnosti a pevnosti, avšak řadu věcí již zapomněl. Zde zopakujeme základní poznatky o kroucení a ohybu; v podrobnostech odkazujeme například na [1, 2]. Pro větší názornost budeme užívat jednoduché výrazy a rovnice.

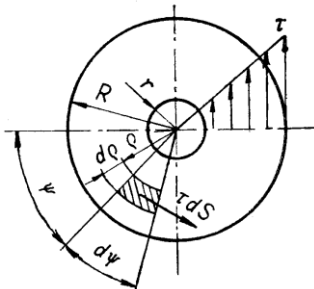
1.1 Krut

Krouticí moment vyvolává ve zkrucované součásti smyková napětí. A naopak, tato napětí dávají ve svém úhrnu krouticí moment, který je v rovnováze s momentem od vnějšího zatížení.

Při zkrucování hřídele nebo tyče **kruhového průřezu** má smykové napětí τ v řezu kolmém k ose v každém místě směr tečny k obrysu (obr. 1.1). V ose je rovno nule a narůstá přímo úměrně se vzdáleností od ní,

$$\tau(\rho) = \frac{M_k}{J_k} \rho . \quad (1.1)$$

M_k je krouticí moment ve vyšetřovaném řezu, J_k je kvadratický moment průřezu k ose (**moment setrvačnosti**, obecně **moment tuhosti průřezu v kroucení**), a ρ je vzdálenost vyšetřovaného bodu od osy.



Obr. 1.1. Rozložení smykových napětí v kruhovém průřezu při působení krouticího momentu.

Nejvyšší smykové napětí působí na vnějším obvodu ($\rho = R = D/2$), a počítá se podle vztahu

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (1.2)$$

kde W_k je tzv. **modul průřezu v kroucení**.

Pro masivní kruhový průřez o průměru D je $J_k = \pi D^4/32$ a $W_k = \pi D^3/16$, pro dutý průřez o vnějším průměru D a vnitřním průměru d je $J_k = \pi(D^4 - d^4)/32$. Pro tenkostěnnou trubku jsou vztahy uvedeny v příkladu řešeném dále v této kapitole.

Účinkem momentu dochází ke zkrucování součásti. Zkrut ϑ vyjadřuje úhel pootočení dvou průřezů na jednotku jejich vzdálenosti:

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{GJ_k}; \quad (1.3)$$

G je modul pružnosti ve smyku, souvisící s modulem pružnosti v tahu E vztahem

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}; \quad (1.4)$$

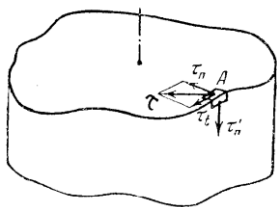
μ je součinitel příčné kontrakce (Poissonovo číslo).

Úhel vzájemného pootočení dvou průřezů vzdálených o l se při volném kroucení počítá jako

$$\varphi = \int_0^l \vartheta(x) dx = \int_0^l \frac{M_k(x)}{GJ_k(x)} dx; \quad \varphi = \frac{M_k l}{GJ_k}; \quad (1.5)$$

vzorec vpravo odpovídá případu, kdy moment a průřez jsou po celé délce konstantní. Při těchto výpočtech vychází úhel φ v radiánech (platí $2\pi = 360^\circ$).

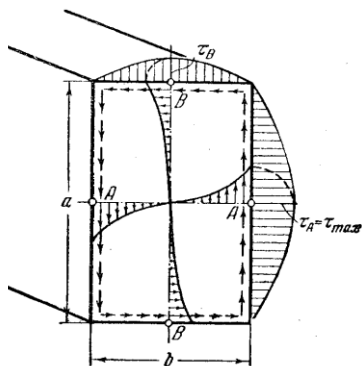
U **nekruhových průřezů** je situace složitější a vysvětlíme ji na tyči obdélníkového průřezu. Připomeňme, že na volném (nezatíženém) obrysu musí mít smykové napětí vždycky směr tečny k obrysu! Kdyby svíralo s obrysem určitý úhel, mohli bychom jeho vektor rozložit do směru tečny k obrysu a směru kolmého, tj. směřujícího např. ven z materiálu (obr. 1.2). Víme ale podle pravidla sdružených smykových napětí, že pokud smykové napětí působí na nějaké plošce, musí stejně velké smykové napětí působit i na plošce kolmé, přičemž obě napětí směřují buď k průsečnici obou ploch, nebo od ní (τ_n a τ_n' na obr. 1.2). Příklad, kdy smykové napětí



Obr. 1.2. Smykové napětí na nezatíženém povrchu (τ) musí mít vždy směr tečny k obrysu.

v průřezu směřuje ven z tyče, by mohl nastat jenom tehdy, kdyby na jejím povrchu působila tečná síla ve směru osy tyče. Je-li ale povrch volný, takže žádná tečná síla na něm nepůsobí, nemůže ani v řezu kolmém k ose působit smykové napětí kolmé k obrysu; musí zde tedy mít pouze směr tečny k obrysu! Na ostré hraně v rovině kolmé k ose zase neexistuje jednoznačný směr tečny, a proto musí být v tomto bodě smykové napětí také rovno nule! Na obr. 1.3 je znázorněno rozložení napětí v průřezu obdélníkového profilu; nejvyšší je uprostřed nejdelsí strany.

Při kroucení nekruhových průřezů se maximální smykové napětí počítá také podle výrazu (1.2), zkrut podle vztahu (1.3) a úhel pootočení dvou průřezů podle vztahu (1.5). Vzorce pro W_k a J_k pro některé tvary průřezu lze najít dále na obr. 1.7 a v literatuře, například v [3, 4, 5, 6].



Obr. 1.3. Rozložení smykových napětí ve zkrucovaném obdélníkovém průřezu.

V době „předpočítačové“, kdy byly možné jenom poměrně jednoduché výpočty, se pro určování napětí používaly různé metody. U zkrucovaných těles různých tvarů průřezu se užívala takzvaná **membránová analogie** [7]. Ludwig Prandtl si všimnul, že parciální diferenciální rovnice, popisující napětí a deformace ve zkrucované tyči, jsou formálně stejné jako rovnice popisující tvar vyboulení membrány účinkem přetlaku v otvoru stejného tvaru, jako je zkrucovaný průřez.

Smykové napětí τ v součásti je úměrné sklonu vrchlíku, vytvořeného membránou, a tuhost v kroucení GJ_k je úměrná objemu vrchlíku. Použití této analogie usnadnilo inženýrům řešení mnoha úloh o kroucení. Ve vhodné krabici byl ve stěně vytvořen otvor o tvaru zkoumaného profilu, a v něm se napnula mýdlová blána, která se vystavila mírnému přetlaku. Potom se vyfotografoval tvar jejího vyboulení, a z něj se počítaly hodnoty napětí a deformací. Tímto způsobem se řešily experimentálně i letecké profily složitých tvarů.

Tento postup již dnes není nutný, protože vhodný software spolehlivě řeší úlohy o kroucení i při nejsložitějších tvarech. Přesto je membránová analogie užitečná i nyní, neboť dává velmi názornou představu o smykových napětích. Někdy stačí představit si v duchu, jak by membrána vypadala. V případě masivního kruhového průřezu má membrána tvar rotačního paraboloidu s vrcholem nahoře. U úzkého obdélníkového průřezu vytvoří membrána převrácený žlab o parabolickém průřezu. V obou případech je největší sklon, a tedy i smykové napětí, na vnějším obrysu. U čtverce, obdélníku, trojúhelníku nebo šestiúhelníku působí nejvyšší smykové napětí na povrchu uprostřed té strany, jejíž kolmá vzdálenost od osy je nejmenší (obr. 1.3). V ostrých koutech nemá membrána žádný sklon, a napětí je tam rovno nule.

U tenkostěnného otevřeného profilu, jehož tloušťka se podél obvodu mění, je výška odpovídajícího zakřiveného žlabu největší v místech s největší tloušťkou. V těchto místech tedy bude také sklon membrány u stěn největší, takže i smykové napětí na povrchu zkrucovaného profilu zde bude nejvyšší.

Máme-li uzavřený tenkostěnný profil (např. trubku), používá membránová analogie představu otvoru o stejném tvaru, jako má vnější obrys trubice, a uvnitř něj na membráně „plave“ destička o tvaru vnitřního obrysu trubice. Destička leží na membráně vodorovně, aby to odpovídalo nulovému smykovému napětí v místech, kde žádný materiál není. Z této představy vyplývá, že v místech, kde je tloušťka stěny menší, bude mít membrána větší sklon než v místech s větší tloušťkou stěny. Skutečně ve zkrucovaném uzavřeném profilu s proměnlivou tloušťkou stěny působí nejvyšší smykové napětí tam, kde je tloušťka stěny nejmenší. Tloušťka stěny se tedy projevuje opačně než u otevřeného profilu, kterého si všimneme dále.

K podobným závěrům dojdeme i na základě představy, že smyková napětí ve stěně uzavřeného profilu vytvářejí smykový tok připomínající kapalinu cirkulující v potrubí, jehož plocha průřezu je úměrná tloušťce stěny. Smykové napětí ve zkrucovaném profilu je přímo úměrné rychlosti kapaliny v analogickém potrubí.

Podle rovnice kontinuity je rychlost proudění kapaliny nejvyšší v nejužším místě, podobně jako smykové napětí bude nejvyšší v místě s nejmenší tloušťkou stěny.

Tenkostěnné uzavřené profily – Bredtovy vztahy

Maximální smykové napětí ve zkrouceném uzavřeném tenkostěnném profilu lze také vypočítat [46] podle jednoduchého Bredtova vzorce [8]:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2St_{\min}}, \quad (1.6)$$

kde M_k je krouticí moment, t_{\min} je minimální tloušťka stěny, a S je plocha celého průřezu profilu včetně dutiny. Modul průřezu v kroucení pak je

$$W_k = 2 S t_{\min}. \quad (1.7)$$

Moment tuhosti průřezu se může vypočítat podle druhého Bredtova vzorce:

$$J_k = \frac{4S^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}. \quad (1.8)$$

Integrovaní po uzavřené křivce podél obrysu profilu je velmi snadné, je-li tloušťka stěny t konstantní, neboť se potom jedná o výpočet délky obvodu.

Tyto jednoduché vztahy lze použít pro předběžný návrh nebo rychlou kontrolu.

Příklad. Stanovte modul průřezu a moment tuhosti v kroucení tenkostěnného uzavřeného profilu obdélníkového průřezu (Jäckel) o rozměrech: $a = 60$ mm, $b = 20$ mm, tloušťka stěny $t = 2$ mm.

Upravíme-li vztah (1.7) pro vyšetřovanou trubku, dostaneme

$$W_k = 2 \times a \times b \times t = 2 \times 60 \times 20 \times 2 = 4800 \text{ mm}^3.$$

Moment tuhosti při konstantní tloušťce stěny (S je plocha průřezu trubky a O délka obvodu) je:

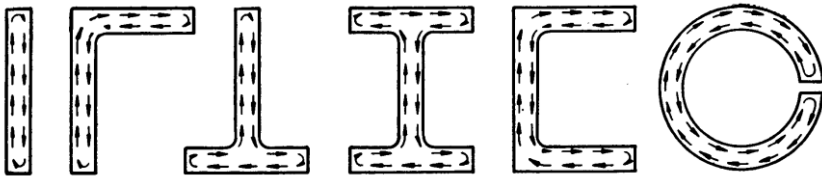
$$J_k = \frac{4S^2}{t} = \frac{4(ab)^2}{2(a+b)t} = \frac{4(60 \times 20)^2}{2(60+20) \cdot 2} = 72000 \text{ mm}^4.$$

Tenkostěnné otevřené profily

Modul průřezu a moment tuhosti průřezu v kroucení otevřených tenkostěnných profilů s konstantní tloušťkou stěny lze počítat podle jednoduchých vztahů

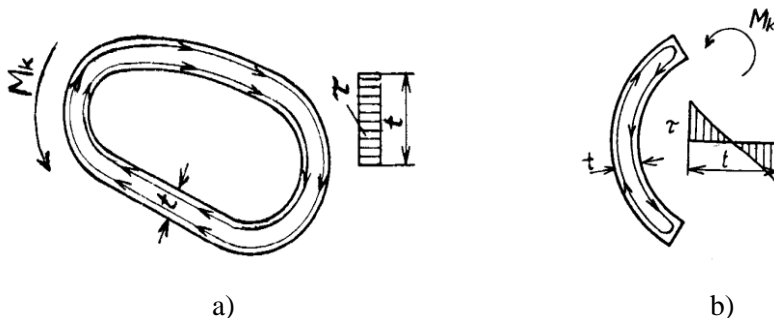
$$W_k = \frac{at^2}{3}, \quad J_k = \frac{at^3}{3}, \quad (1.9 \text{ a, b})$$

kde a je celková délka střednice, tj. délka rozvinutého profilu nebo součet délek jednotlivých částí průřezu (například u „I“ profilu), a t je tloušťka stěny. Maximální smykové napětí se počítá podle vztahu (1.2), úhel pootočení dvou průřezů podle vztahu (1.5).



Obr. 1.4. Rozložení smykových napětí ve zkrucovaných otevřených profilech [7].

Existuje veliký rozdíl mezi odporem vůči kroucení u tenkostěnných profilů otevřených a uzavřených. V profilu otevřeném bývá smykové napětí mnohem vyšší než v profilu uzavřeném, a také jeho deformace (úhel pootočení) je mnohem větší. Je to zřejmé z obr. 1.5, kde jsou nakresleny průběhy smykových napětí v obou průřezích. V uzavřeném profilu (a) působí smyková napětí opačného směru v protějších, relativně vzdálených částech průřezu, takže moment, který vytvářejí,

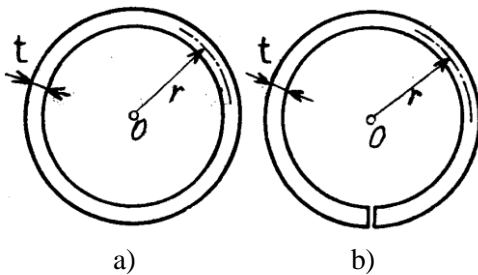


Obr. 1.5. Rozložení smykových napětí τ od kroucího momentu M_k v tenkostěnném průřezu: a) uzavřeném, b) otevřeném.

je poměrně velký. U otevřeného profilu (b) jsou opačně orientovaná napětí mnohem blíže u sebe, takže vytvářejí mnohem menší moment. Naopak na to, aby vzdorovala vnějšímu momentu, stačí u uzavřeného profilu mnohem nižší smyková napětí než u profilu otevřeného. Rozdíly mezi oběma profily, týkající se deformací, jsou ještě větší. Budeme to ilustrovat na porovnání dvou konkrétních průřezů.

Příklad.

Porovnejte velikost smykového napětí a zkrut ve dvou podobných tenkostěnných profilech kruhového průřezu; jeden je uzavřený a druhý otevřený (obr. 1.6). Oba mají stejnou tloušťku stěny, která je konstantní. Průměr a tloušťka stěny v obou případech jsou: $D = 2r = 100$ mm, $t = 1$ mm.



Obr. 1.6. Zkrucované kruhové profily: a) uzavřený, b) otevřený.

Řešení. Ze vzorce (1.2) vyplývá, že stačí porovnat jejich moduly průřezu v kroucení. Index „o“ bude značit uzavřený profil a index „c“ otevřený profil.

Uzavřený profil

$$W_{ko} = 2 S t = 2 (\pi D^2/4) t = \pi D^2 t/2, \quad (1.10)$$

otevřený profil

$$W_{kc} = a t^2/3 = \pi D t^2/3. \quad (1.11)$$

Poměr obou modulů průřezu je

$$\frac{W_{ko}}{W_{kc}} = \frac{\pi D^2 t/2}{\pi D t^2/3} = \frac{3 D}{2 t}. \quad (1.12)$$

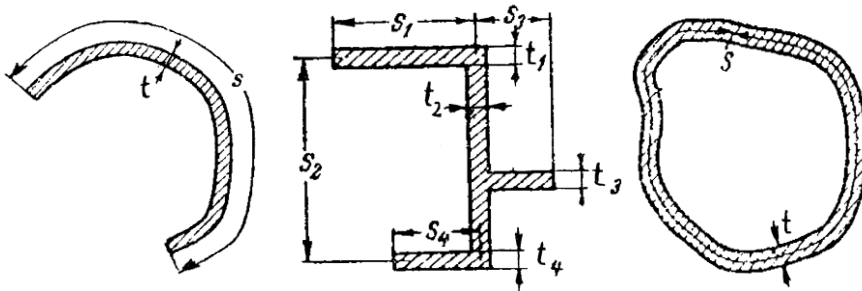
Po dosazení $d = 100$ mm, $t = 1,0$ mm dostaneme $W_{ko} / W_{kc} = 150$. To je velký rozdíl, a souvisí s rozložením smykových napětí v průřezu, jak bylo zmíněno dříve.

Pro porovnání deformací stačí vypočítat poměr momentů tuhosti obou profilů:

$$\frac{J_{k,o}}{J_{k,c}} = \frac{\pi D^3 t / 4}{\pi D t^3 / 3} = \frac{3}{4} \left(\frac{D}{t} \right)^2. \quad (1.13)$$

Po dosazení $d = 100 \text{ mm}$, $t = 1,0 \text{ mm}$ dostaneme $J_{k,o} / J_{k,c} = 7500$. Rozdíl je obrovský. Z toho je zřejmé, že pro efektivní přenos kroucení jsou uzavřené profily mnohem výhodnější.

Na obrázku 1.7 jsou vztahy pro výpočet momentu tuhosti v kroucení J_k a modulu průřezu W_k tří typů tenkostěnných profilů.



$$J_k = \frac{1}{3} t^3 s$$

$$W_k = \frac{1}{3} t^2 s$$

$$J_k = \frac{1}{3} \sum_i t_i^3 s_i$$

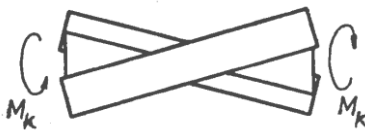
$$W_k = J_k / t_{\max}$$

$$J_k = \frac{4F^2}{\oint ds/t}$$

$$W_k = 2F^* t_{\min}$$

Obr. 1.7. Moment tuhosti v krutu J_k a modul průřezu W_k tenkostěnných profilů [5].

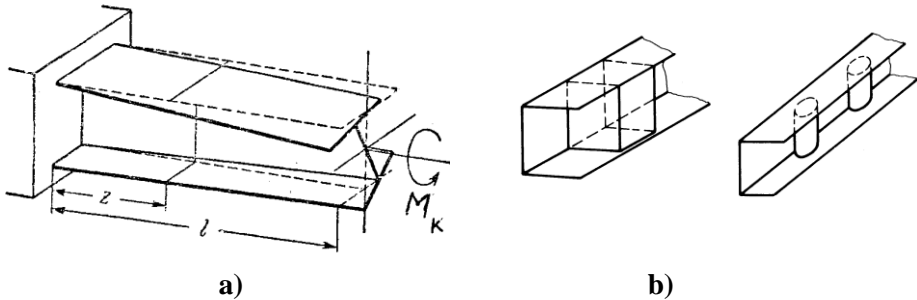
Uvedené vzorce platí pro tzv. **volné kroucení**, kdy u otevřených profilů při zkrucování nic nebrání ztrátě rovinnosti průřezu, tzv. deplanaci (obr. 1.8).



Obr. 1.8. Deplanace průřezu při volném kroucení otevřeného profilu.

Stísněné kroucení naproti tomu nastává, jestliže při zkrucování tenkostěnného profilu něco deplanaci brání, například čela pevně spojená s tuhou částí konstrukce, nebo různé přepážky (obr. 1.9). Při stísněném kroucení se kromě smykových napětí

objeví ještě napětí normálová. Teorie stísněného kroucení si všimneme v kapitole druhé. Běžné programy metody konečných prvků mohou řešit také toto kroucení.



Obr. 1.9. a) Stísněné kroucení, b) Zvyšování tuhosti v krutu otevřených profilů.

Vzorce, jež byly uvedeny v této kapitole, jsou velmi jednoduché a hodí se spíše pro orientační výpočty. Upevnění tenkostěnného otevřeného profilu do tuhé konstrukce nebo jeho spojení s jinými součástmi může výrazně omezit podmínky volného kroucení, jak uvidíme v kapitole 2. Pro přesnější řešení je vhodnější metoda konečných prvků a osvědčený software.

1.2 Ohyb

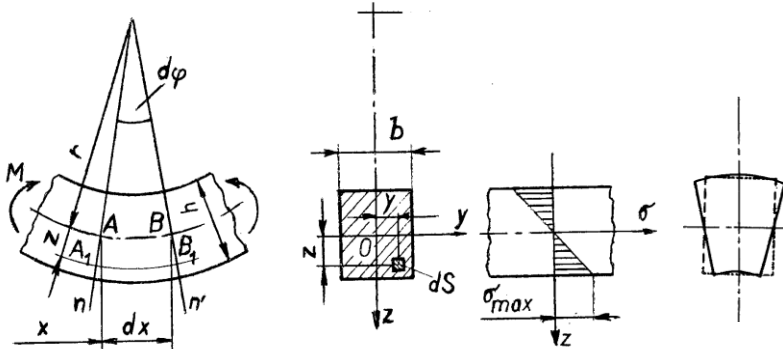
Účinkem ohybového momentu M vznikají v součásti ohybová napětí. V podstatě se jedná o napětí normálová, která v jedné části průřezu vyvolávají tah, a ve druhé části naopak tlak (obr. 1.10). Kromě nich často působí v ohýbaném prvku i napětí smyková, která se snaží posouvat vrstvy materiálu po sobě. Smykových napětí si všimneme v této kapitole později. Pro porušení dlouhých nosníků nebo hřídelů, jsou nebezpečnější napětí ohybová. Obrázek 1.10 ukazuje jejich rozložení v průřezu. Na ose, procházející těžištěm průřezu, jsou rovna nule (proto se této ose říká neutrální) a narůstají přímo úměrně se vzdáleností z od této osy [1, 2]:

$$\sigma(z) = \frac{M}{J} z ; \quad (1.14)$$

J je kvadratický moment průřezu k ose procházející těžištěm, nazývaný také **moment setrvačnosti v ohybu** (rozměr m^4 , cm^4 nebo mm^4). Například k ose y je definován výrazem

$$J_y = \int_{(S)} z^2 dS. \quad (1.15)$$

Integrace se provádí přes celou plochu průřezu. Kvadratický moment J_z k ose z bychom dostali záměnou y za z .



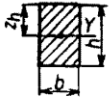
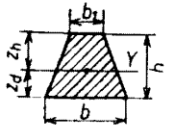
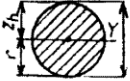
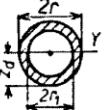
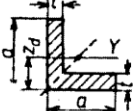
Obr. 1.10. Ohyb: geometrie, průřez, rozložení napětí a deformace příčného řezu. r – poloměr křivosti neutrální osy [1].

Ohybová napětí nabývají maximální hodnoty v místech nejvíce vzdálených od neutrální osy:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} z_{\max} = \frac{M}{W}; \quad (1.16)$$

W je tzv. **modul průřezu v ohybu** (m^3 , cm^3 , mm^3). U průřezů nesymetrických vůči neutrální ose mají maximální napětí v obou nejvzdálenějších vláknech různé hodnoty; mohli bychom tedy rozlišovat i dva moduly průřezu. U křehkých materiálů je nutno kontrolovat obě napětí, protože pevnost křehkého materiálu v tahu bývá několikrát nižší než pevnost v tlaku, a k porušení by mohlo dojít oběma způsoby. Tomu se také někdy přizpůsobuje tvar průřezu, aby byly optimálně využity pevnostní vlastnosti materiálu.

Na obrázku 1.11 jsou momenty setrvačnosti a moduly průřezu v ohybu základních tvarů.

Tvar průřezu	Průřezová plocha F	Poloha těžiště z_h, z_d	Moment setrvačnosti J_y	Průřezový modul $W_{1,2} = \frac{J}{z_{h,d}}$
	bh	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
	$\frac{1}{2}(b + b_1) h$	$z_h = \frac{2b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$ $z_d = \frac{b + 2b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{b + b_1} \frac{h^2}{36}$	$W_1 = \frac{J}{z_h}$ $W_2 = \frac{J}{z_d}$
	πr^2	r	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^3}{4}$
	$\pi(r^2 - r_1^2)$	r	$\frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4)$	$\frac{\pi}{4r}(r^4 - r_1^4)$
	$(2a - t) t$	$z_d = \frac{1}{2} \frac{a^2 + (a-t)t}{2a-t}$	$\frac{1}{3}[a^3 + (a-t)t^2]t - 2(a-t)t \cdot z_d^2$	$W_1 = \frac{J}{a - z_d}$ $W_2 = \frac{J}{z_d}$

Obr. 1.11. Průřezové charakteristiky v ohybu základních tvarů profilů [9].

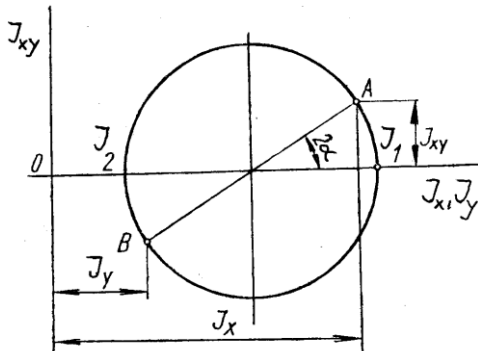
Důležitou průřezovou charakteristikou je také tzv. **deviační moment**, definovaný výrazem

$$J_{yz} = \int (S) yz dS \quad (1.17)$$

Má-li vyšetřovaný profil osu symetrie, pak deviační moment k této ose a k ose kolmé je roven nule. Profil zatížený příčnou silou ve směru osy symetrie se prohýbá v tomto směru. U nesymetrických profilů může být deviační moment různý od nuly. V takovém případě se nosník při zatížení prohýbá nejen ve směru zatížení, ale vybočuje i do strany.

Momenty setrvačnosti a deformační moment závisí na tvaru průřezu, ale též na orientaci os, ke kterým se počítají. Kdybychom vypočítali jejich hodnoty pro určitý průřez pro všechna natočení os v rovině průřezu a vynáseli je v rovině J, J_{xy} , dostaneme tzv. Culmannovu kružnici (obr. 1.12). Vidíme, že existují dva navzájem kolmé směry, ke kterým jsou momenty setrvačnosti extrémní (maximální J_1 a minimální J_2), a deformační momenty jsou rovny nule. To jsou **hlavní směry** a odpovídající **hlavní osy** průřezu. (Příslušné vzorce jsou uvedeny dále.) Vhodnou orientací profilu vůči směru zatížení můžeme předejít nevhodným deformacím. Natočíme-li jej tak, aby se směr příčného zatížení shodoval s hlavní osou průřezu, bude se nosník prohýbat přesně ve směru zatížení.

Poznámka. Osa symetrie je vždy hlavní osou.

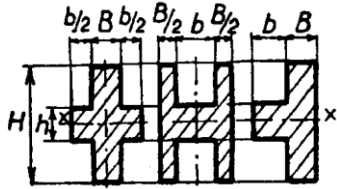


Obr. 1.12. Culmannova kružnice.
 J_1, J_2 – hlavní momenty setrvačnosti.

Průřezové charakteristiky – složitější případy

Průřezové charakteristiky, jako moment setrvačnosti nebo deformační moment, můžeme počítat podle obecných vztahů (1.15) a (1.17). Konkrétní hodnoty pro průmyslově vyráběné tvary profilů (například U, I nebo L) a rozměry průřezů lze najít v normách nebo ve strojnických a stavebních tabulkách, např. [24, 26], ale i v některých počítačových programech pro pevnostní řešení konstrukcí. Pro některé důležité tvary, které se uplatňují u tenkostěnných konstrukcí, jsou výpočetní vzorce shrnuty na obr. 1.13.

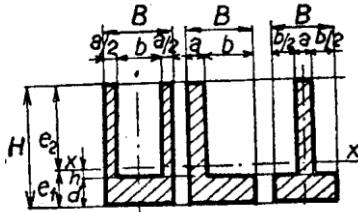
Použití těchto vztahů budeme ilustrovat dále.



$$I_x = \frac{1}{12} (BH^3 + bh^3);$$

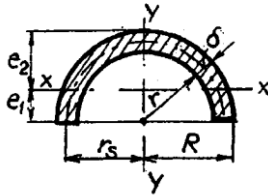
$$W_x = \frac{1}{6H} (BH^3 + bh^3);$$

$$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{12 (BH + bh)}};$$



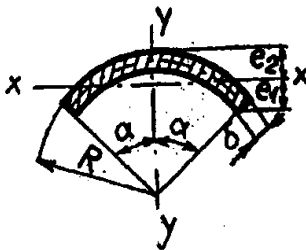
$$I_x = \frac{1}{3} (Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3); \quad e_1 = \frac{1}{2} \frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd};$$

$$W_x = \frac{I_x}{e_2}; \quad e_2 = H - e_1;$$



$$I_x = 0,1098 (R^4 - r^4) - 0,283 R^2 r^2 \frac{R - r}{R + r} \approx 0,3 \delta r_s^3$$

pro $\frac{\delta}{r_s} \ll 1$;



α v míře obloukové ($\alpha = \pi\alpha^\circ/180$); $F = 2\alpha R\delta$; pro malé δ :

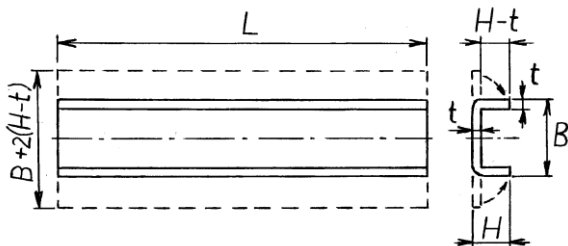
$$I_x = R^3\delta \left(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right);$$

$$I_y = R^3\delta(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

$$e_1 = R \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right); \quad e_2 = R \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right);$$

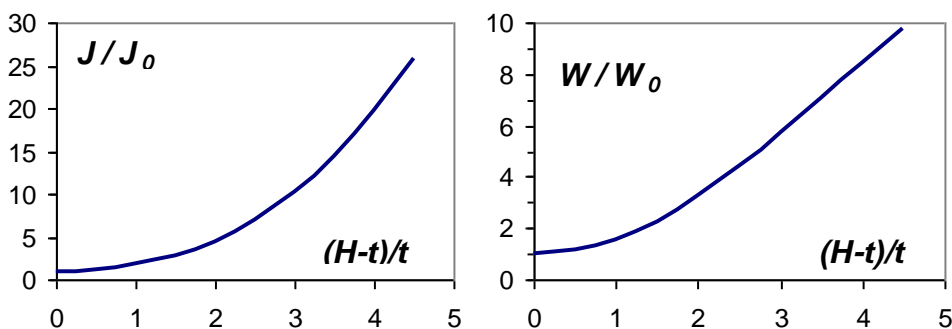
Obr. 1.13. Momenty setrvačnosti a moduly průřezu v ohybu tenkostěnných profilů [3].

Příklad. Pro zvýšení tuhosti tenkých pásů vůči zatížení v příčném směru se jeho boční okraje někdy ohýbají, takže profil má tvar širokého U (obr. 1.14 vlevo). Zde ukážeme, jak narůstá moment setrvačnosti a modul průřezu pro ohyb v příčném směru v závislosti na výšce ohnutých boků.



Obr. 1.14. Dlouhý široký pás vyztužený ohnutím boků.

Řešení. Výpočet vycházel ze vztahů pro J_x a W_x odpovídajících druhému případu shora vlevo na obr. 1.13. Výsledky pro různé výšky boků H byly porovnány s hodnotami J_{x0} a W_{x0} pro výchozí pás bez ohnutých boků, a jsou znázorněny v bezrozměrovém tvaru na obr. 1.15: obě veličiny rychle rostou s rostoucí výškou boků. Ohnutí boků velmi účinně přispívá ke zvýšení tuhosti plochého polotovaru.



Obr. 1.15. Moment setrvačnosti a modul průřezu U-profilu ve směru kolmém ke stojině pro různé výšky boků.

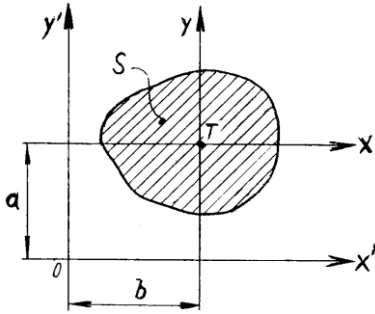
Konstrukční díl bývá často vytvořen spojením dvou nebo více jednodušších částí. Příkladem je deska vyztužená žebry. Někdy bývá celý díl orientován nebo zatížen v jiných směrech, než jsou osy symetrie jeho částí. Výsledné průřezové charakteristiky lze opět počítat podle obecných definic. Jestliže ale známe momenty jednotlivých prvků, můžeme je získat snáze pomocí vzorců pro transformaci souřadnic. Zde si všimneme dvou případů.

Kvadratické momenty k posunutým osám

Centrální osy jsou takové, které procházejí těžištěm průřezu. Moment setrvačnosti k ose x' rovnoběžné s centrální osou x (obr. 1.16) se vypočítá jako [1, 2]:

$$J_{x'} = J_x + a^2 S, \quad (1.18)$$

kde J_x je kvadratický moment k ose, procházející těžištěm, a je vzdálenost obou os, a S je plocha průřezu. V případě kolmé osy y je výpočet podobný, s tím, že se index x ve vztahu (1.18) nahradí indexem y , a místo a se užije vzdálenost b os y a y' .



Obr. 1.16. Kvadratické momenty průřezu k posunutým osám. T – těžiště, S – plocha průřezu.

Deviační moment k posunutým osám je definován vztahem

$$J_{xy'} = J_{xy} + ab S, \quad (1.19)$$

kde J_{xy} je deviační moment k osám procházejícím těžištěm průřezu, a a , b jsou vzdálenosti nových os x' , y' od centrálních os x , y .

Vztahy (1.18) a (1.19) se nazývají první a druhá Steinerova věta. Zatímco moment setrvačnosti je vždy kladný, může deviační moment být kladný nebo záporný podle toho, jak je průřez orientován vůči souřadným osám. Má-li průřez osu symetrie, je deviační moment k ní a k ose kolmé roven nule.

Těžiště průřezu

Abychom mohli aplikovat Steinerovu větu, musíme znát polohu těžiště výsledného průřezu. Ta se vypočítá z rovnice rovnováhy statických momentů k libovolně zvolené ose na obr. 1.16, například x :

$$y_T S = \int_{(S)} y dS = \sum_n y_{Tj} S_j; \quad (1.20)$$

y je vzdálenost od zvolené osy, y_T , resp. y_{Tj} je vzdálenost těžiště průřezu, resp. jeho j -té části od této osy, a S , resp. S_j je plocha celého průřezu, resp. j -té části; počet částí je n . Vydělením rovnice (1.20) celkovou plochou S dostaneme vzdálenost těžiště výsledného průřezu od zvolené osy:

$$y_T = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS = \frac{1}{S} \sum_n y_{Tj} S_j \cdot \quad (1.21)$$

Kvadratické momenty k pootočeným osám

Momenty setrvačnosti a deviační moment určitého průřezu závisí na orientaci souřadných os, ke kterým se počítají. Hodnoty těchto momentů pro určitý průřez, vypočítané k různě natočeným osám, leží na kružnici, které se říká Culmannova (obr. 1.12). Lze dokázat, že každým bodem průřezu procházejí dvě navzájem kolmé osy, ke kterým jsou momenty setrvačnosti extrémní, a deviační moment je roven nule. Tyto osy jsou hlavní osy průřezu, a momenty J_{\max} , J_{\min} jsou tzv. hlavní momenty setrvačnosti, které se vypočítají ze známých momentů J_x , J_y a J_{xy} v základním souřadném systému x , y podle vztahů [1, 6]:

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad , \quad (1.22a)$$

$$J_{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad . \quad (1.22b)$$

Úhel mezi osou x a hlavní osou, ke které je moment setrvačnosti maximální, je dán vztahem

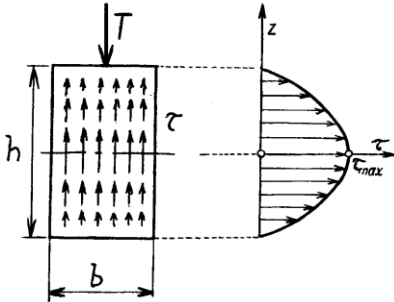
$$\alpha(J_{\max}) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \quad . \quad (1.23)$$

Příčné zatížení a smyková napětí

U dlouhých nosníků zatížených příčnými silami jsou pro dimenzování obvykle rozhodující ohybová napětí. U krátkých nosníků, a zejména u tenkostěnných součástí, se mohou výrazně uplatnit také napětí smyková.

Příčné zatížení vyvolává v nosníku smykové napětí. Má-li jeho průřez tvar úzkého obdélníku o šířce b a výšce h (obr. 1.17), je smykové napětí rozděleno napříč průřezem podle paraboly:

$$\tau_{xy}(z) = \frac{3 T}{2 bh} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \quad (1.24)$$



Obr. 1.17. Ohyb příčnou silou T .
Rozložení smykových napětí v průřezu.

V místech nejvíce vzdálených od neutrální osy ($z = \pm h/2$) je τ rovno nule, a na této ose ($z = 0$) je maximální, o velikosti

$$\tau_{xy}(z) = \frac{3 T}{2 bh} = \frac{3}{2} \tau_{stř}, \quad (1.25)$$

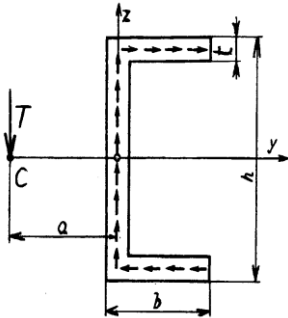
kde $\tau_{stř}$ je střední hodnota smykového napětí v průřezu; platí $\tau_{stř} = T/S = T/(bh)$.

Všimněme si nyní vlivu tvaru průřezu. Odpor vůči ohybu je tím vyšší (a maximální ohybové napětí tím nižší), čím více materiálu se nachází ve větší vzdálenosti od neutrální osy a méně na této ose a v její blízkosti. Proto se používají duté profily (trubky) nebo válcované nosníky s průřezem I nebo U, s tenčí stojinou a masivnějšími přírubami, a také tenkostěnné profily, vytvořené například ohýbáním. U nich je rozložení smykových napětí v průřezu složitější, ale vždycky platí, že na volném povrchu má smykové napětí směr tečny k obrysu.

Smyková napětí v tenkostěnných profilech

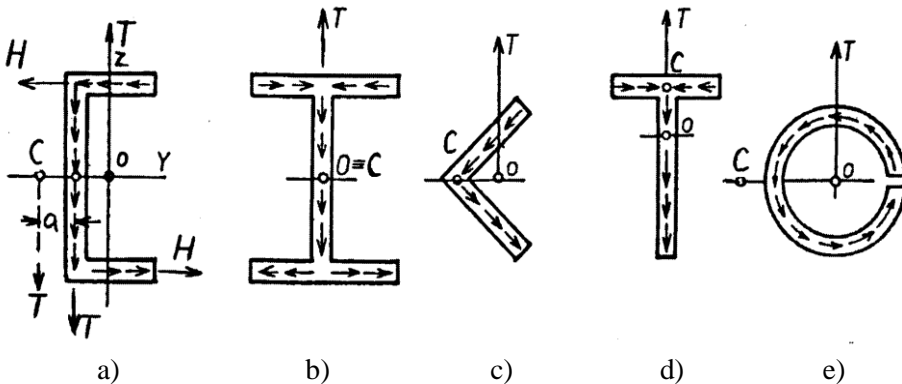
Při zatížení příčnými silami se v nosníku objeví také smyková napětí, a ta mohou mít na první pohled nečekané důsledky. Na obr. 1.18 je nakreslen tenkostěnný U–profil pootočený o 90° a zatížený příčnou silou ve směru stojiny. Jsou tam naznačena i odpovídající smyková napětí. Tato napětí dohromady dávají v průřezu síly a momenty. Výslednice svislých sil, $V = \int \tau(z) \times t \times dz$, je stejně velká, jako vnější příčná síla T , ale má opačný směr. Napětí v dolní a horní pásnici vyvolávají vodorovné síly, $H = \int \tau(y) \times t \times dy$. Obě jsou stejně velké a navzájem se ruší.

(Nemohou mít výslednici, protože v tomto směru na nosník nepůsobí žádná vnější síla.) Ale protože mají opačné směry a jsou od sebe vzdáleny, tvoří silovou dvojici, která se bude snažit nosník zkrucovat. Nemá-li k tomu dojít, musí vnější svislá síla T působit v určité vzdálenosti od stojiny; musí procházet takzvaným středem smyku (bod C na obr. 1.18; platí $T \times a = H \times h$).



Obr.1.18. Rozložení smykových napětí v profilu „U“ zatíženém silou T . Nemá-li dojít k jeho zkrucování, musí příčná síla procházet středem smyku „C“

Na obr. 1.19 je pět tenkostěnných profilů s naznačenými smykovými napětími a středem smyku C. V případech **b** a **d** leží střed smyku v těžišti průřezu **o**, takže pokud bude příčné zatížení procházet těžištěm, nebude ke zkrucování docházet. Nosníky o profilech **a**, **c**, **e** se budou při zatížení zkrucovat a navíc budou vybočovat do strany, protože jejich deviační momenty jsou různé od nuly.



Obr. 1.19. Průběhy smykových napětí a středy smyku (C) v tenkostěnných profilech zatížených příčnou silou T [7].

Působí-li v součásti zároveň napětí normálová a smyková, je k tomu nutno přihlížet. U dlouhých štíhlých nosníků stačí zpravidla kontrolovat maximální

ohybové napětí. U kratších nosníků zatížených příčnou silou nebo krouticím momentem mohou normálová i smyková napětí v některých místech mít srovnatelnou velikost. V takových případech je nutno podle vhodné hypotézy zkontrolovat maximální ekvivalentní napětí, například normálové v součásti z křehkého materiálu, nebo von Misesovo (hypotéza HMH) u součásti tvárné.

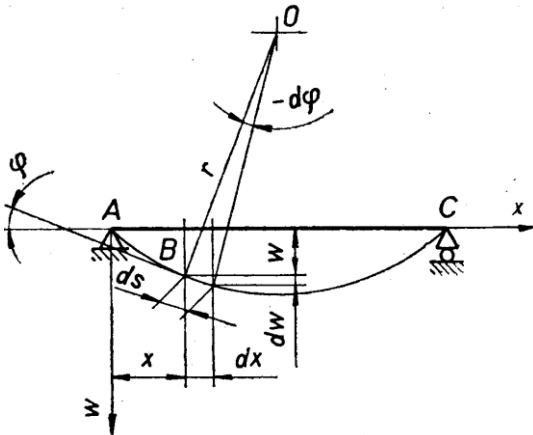
Deformace při ohybu

Při zatížení se nosníky a hřídele ohýbají. Největší vliv má ohybový moment. Jeho účinkem se původně přímá osa tenkého prutu zakříví (obr. 1.20). V konkrétním místě x má osa křivost $1/r$ úměrnou ohybovému momentu $M(x)$:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{M(x)}{EJ}; \quad (1.26)$$

r je poloměr křivosti osy v daném místě, a E je modul pružnosti materiálu. Součin EJ vyjadřuje tuhost průřezu součásti v ohybu. Využijeme-li dále přibližný vztah mezi křivostí a průhybem w (obr. 1.20), $1/r(x) = -d^2w/dx^2$, získáme diferenciální rovnici průhybové čáry pro malé deformace:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = w'' = -\frac{M}{EJ}. \quad (1.27)$$



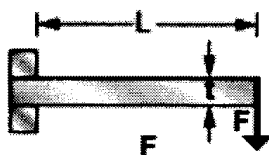

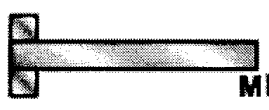


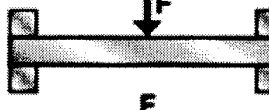

Obr. 1.20. Průhybová čára [1].

Při známém průběhu ohybového momentu podél prutu, $M(x)$, dostaneme dvojitě integrací rovnice (1.27) průběh průhybu,

$$w(x) = \int \left[- \int \frac{M(x)}{EJ} dx \right] dx + C_1 x + C_2 \quad (1.28)$$

Integrační konstanty C_1 , C_2 vyplynou z okrajových podmínek, jež vyjadřují známé deformace (průhyb, sklon) v určitých místech.

Zpravidla nás zajímá maximální průhyb nebo sklon průhybové čáry. Na obr. 1.21 jsou uvedeny vzorce pro nejdůležitější případy. Další vztahy lze najít v [3, 4, 6, 10] nebo v příručce [11], která je volně přístupná na webu.

	C_1	C_2	
	3	2	δ – maximální průhyb (m)
	8	6	$\delta = \frac{FL^3}{C_1 EJ}, \text{ resp. } \frac{ML^2}{C_1 EJ}$
	2	1	φ – úhel sklonu konce (rad)
	48	16	$\varphi = \frac{FL^2}{C_2 EJ}, \text{ resp. } \frac{ML}{C_2 EJ}$
	$\frac{384}{5}$	24	Platí: $\varphi(^{\circ}) = \varphi(\text{rad}) \times 180/\pi$
	192	-	F – síla (N)
	384	-	M – moment (Nm)
			L – délka, rozpětí (m)
			E – Youngův modul (N/m ²)
			J – moment setrvačnosti (m ⁴)

Obr. 1.21. Typické případy uložení a zatížení nosníků (podle [11]).
Uvedené vzorce platí pro relativně malé průhyby.

Většina výpočtů napětí a deformací při konstrukčních návrzích se provádí metodou konečných prvků [12, 13] s použitím vhodného software, jako je například Ansys, Abaqus, Cosmos, Marc nebo ProEngineer. V této knížce ale budeme pro získání jednoduché názorné představy i nadále vycházet z analytických řešení.

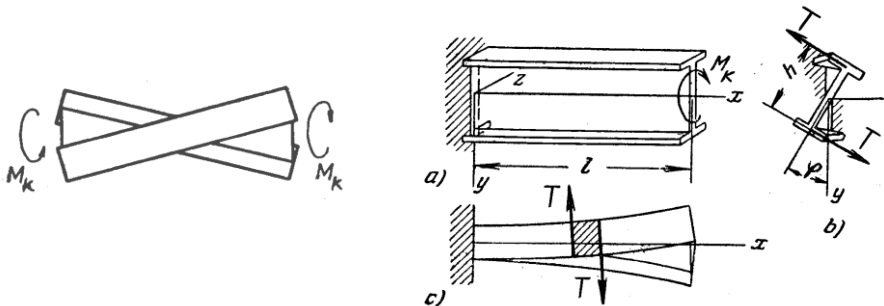
Literatura ke kapitole 1.

1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
2. Kolektiv, Pružnost a pevnost I. ČVUT, Praha, 1965. 272 s.
3. Krutina, J.: Sbírká vzorců z pružnosti a pevnosti. SNTL, Praha, 1962. 240 s.
4. Roark, R., J., Young, W. C.: Roark's Formulas for Stress and Strain. Sixth Edition. McGraw-Hill, Singapore, 1989. 763 s.
5. Feodosjev, V. I.: Soprotivlenije materialov. Nauka, Moskva, 1972. 544 s.
6. Černoch, S.: Strojně technická příručka. Díl 1. 12. přepracované vydání. SNTL, Praha, 1968. 1183 s.
7. Den Hartog, J. P.: Advanced strength of materials. Dover Edition, 1978. McGraw-Hill, New York, 1952. 378 s.
8. Szabó, I.: Mechanika tuhých těles a kapalin. SNTL, Praha, 1967. 476 s.
9. Novák, O. a kolektiv: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství. Tech. průvodce sv. 3. SNTL, Praha, 1963. 536 s.
10. Hořejší, J., Šafka, J. a kol.: Statické tabulky. SNTL, Praha, 1987. 688 s.
11. Ashby, M. F.: Useful solutions for standard problems. Cambridge University, Engineering department, Cambridge, 2010. Je volně přístupná přes Knovel nebo Google, nebo na:
<https://www.dartmouth.edu/~cushman/courses/engs171/UsefulSolutionsForStandardProblems.pdf>
12. Kolář, J., Němec, I., Kanický, V.: FEM – principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 2001. 401 s.
13. Menčík, J.: Aplikovaná mechanika materiálů. Univerzita Pardubice, 2019. 196 s. Volně dostupná na: <https://dk.upce.cz/handle/10195/72947> nebo přes <https://eshop.upce.cz>

2. Stísněné kroucení

V kapitole 1 jsme řekli, že při kroucení tenkostěnných otevřených profilů dochází k jejich **deplanaci**, neboli ztrátě rovinnosti průřezu (obr. 2.1 vlevo). Je-li profil nějakým způsobem vyztužen, například má-li čela pevně spojená s tuhou částí konstrukce nebo v něm jsou různé přepážky, nebude k deplanaci docházet buď vůbec, nebo jen v omezené míře. Jeho kroucení je **stísněné** a profil se jeví jako tužší. Kromě smykových napětí se objeví ještě napětí ohybová.

Situaci vysvětlíme na příkladu tyče o průřezu „I“, zatížené kroučícím momentem M_k , např. tak, že na příruby působí kolmé síly T stejné velikosti, ale opačného směru (obr. 2.1 vpravo). Je-li tyč volná, zdeformuje se podle obr. 2.1 vlevo. Příruby se vůči sobě pootočily, došlo k deplanaci průřezu. Jestliže je ale jeden konec tyče pevně spojen s tuhým tělesem, nemůže zde deplanace nastat, odpor tyče vůči kroucení je větší a deformace jsou menší. Příčné síly vyvolávají kromě kroucení také ohyb přírub (obr. 2.1c). Hovoříme proto také o kroucení vázaném. Dále uvedeme jednoduchou analýzu této situace podle [1, 2].



Obr. 2.1. Zkrucování I-profilu: obrázek vlevo: volné kroucení vyvolávající deplanaci, obrázek vpravo (a, b, c): stísněné kroucení [3].

V přírubách působí posouvající síly T , které vytvářejí dvojici o momentu $M_o = T \times h$, kde h je vzdálenost přírub (obr. 2.1b). Kroučící moment M_k bude v rovnováze s momentem dvojice posouvajících sil a momentem způsobeným zkrucováním tyče. Můžeme napsat

$$M_k = T h + G \vartheta J_k , \quad (2.1)$$

kde ϑ je zkrut ($= d\varphi/dx$) a J_k je moment tuhosti celého průřezu v krutu.

Pro průhyb w příruby ve směru osy y platí diferenciální rovnice (1.27) v kapitole 1: $w'' = -M_o/EJ_z$, kde M_o je ohybový moment v přírubě od příčné síly, a J_z je moment setrvačnosti průřezu příruby k ose z , pro který platí $J_z = tb^3/12$; t je tloušťka příruby a b její šířka (ohýbání probíhá ve směru b). Derivováním rovnice průhybové čáry (1.27) podle x dostaneme rovnici

$$\frac{dM_o}{dx} = T = -EJ_z w'''. \quad (2.2)$$

Využijeme-li toho, že úhel pootočení průřezu $\varphi = \varphi(x)$, zkrut $\mathcal{G} = d\varphi/dx$, a průhyb příruby je $w = \varphi h/2$, můžeme rovnici (2.1) zapsat ve tvaru

$$M_k = -\frac{EJ_z h^2}{2} \varphi''' + GJ_k \varphi'. \quad (2.3)$$

Toto je diferenciální rovnice druhého řádu pro zkrut \mathcal{G} ,

$$M_k = -\frac{EJ_z h^2}{2} \mathcal{G}'' + GJ_k \mathcal{G}, \quad (2.4)$$

která má obecné řešení

$$\mathcal{G} = \varphi' = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + \frac{M_k}{GJ_k}, \quad (2.5)$$

kde

$$\beta = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2GJ_k}{EJ_z}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{1}{1+\mu} \frac{J_k}{J_z}}. \quad (2.6)$$

Je-li tyč dlouhá (prakticky stačí, je-li tyč delší než $3/\beta$) musí pro $x \rightarrow \infty$ zůstat zkrut konečný, takže bude $C_1 = 0$. Druhá konstanta vyplyne z podmínky, že pro $x = 0$ (vetknutí) je $w' = 0$, a tedy také $\mathcal{G} = 0$. Po úpravě proto rovnice (2.5) přejde na tvar

$$\mathcal{G} = \frac{M_k}{GJ_k} (1 - e^{-\beta x}). \quad (2.7)$$

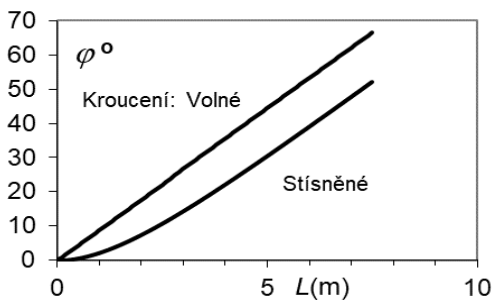
Integrací tohoto výrazu podle x a užitím okrajové podmínky $\varphi(0) = 0$ dostaneme

$$\varphi = \frac{M_k}{GJ_k} \left[x + \frac{1}{\beta} (e^{-\beta x} - 1) \right]. \quad (2.8)$$

Pro velké vzdálenosti od vetknutého konce bude úhel pootočení (v radiánech)

$$\varphi_{x \rightarrow \infty} = \frac{M_k}{GJ_k} \left(x - \frac{1}{\beta} \right). \quad (2.9)$$

Zkroucení dlouhé tyče bude tedy podobné, jako kdyby platila teorie volného krutu, ale tyč byla kratší o délku $1/\beta$ (obr. 2.2).



Obr. 2.2. Úhel pootočení φ volného konce I-profilu při volném a stísněném kroucení v závislosti na jeho délce L .

Ohybový moment v přírubě dostaneme z rovnice průhybové čáry (1.28):

$$M_o = -EJ_z w'' = -\frac{EJ_z h}{2} g' = -\frac{EJ_z h}{2} \frac{M_k}{GJ_k} \beta e^{-\beta x}. \quad (2.10)$$

Nejvyšší hodnoty dosahuje ve vetknutí ($x = 0$):

$$M_{o, \max} = \frac{EJ_z M_k}{2GJ_k} \beta h = \frac{1}{\beta h} M_k. \quad (2.11)$$

Konkrétní představu získáme z následujícího příkladu.

Příklad.

Tenkostěnný I-profil z ocelového plechu podle obr. 2.1 má následující rozměry: výška stojiny $h = 100$ mm, šířka pásnic $b = 100$ mm, všechny tloušťky jsou $t = 2$ mm. Je zatížen krouticím momentem $M_k = 10$ Nm. Vypočítejte, jaké v něm bude působit maximální napětí a jaké budou deformace při: A) volném, a B) stísněném kroucení při předpokládané délce profilu l : a) 500 mm, b) 1000 mm, c) 5000 mm.

Řešení. Podle vzorců (1.9a, b) je moment tuhosti v kroucení $J_k = at^3/3 = (100+100+100) \times 2^3/3 = 800 \text{ mm}^4$ a modul průřezu v kroucení $W_k = at^2/3 = (100+100+100) \times 2^2/3 = 400 \text{ mm}^3$. (a je součet délek všech částí otevřeného profilu, tj. šířek obou pásnic a výšky stojiny.) Moment setrvačnosti v ohybu příruby $J_z = tb^3/12 = 2 \times 100^3/12 = 166667 \text{ mm}^4$, modul průřezu v ohybu $W_z = tb^2/6 = 2 \times 100^2/6 = 3333,3 \text{ mm}^3$. Modul pružnosti je $E = 210000 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\mu = 0,3$; modul pružnosti ve smyku $G = E/[2(1+\mu)] = 80769 \text{ MPa}$.

A) Volné kroucení

Maximální smykové napětí $\tau_{\max} = M_k/W_k = 10000/400 = 25,0 \text{ MPa}$.

Úhel vzájemného pootočení konců tyče v závislosti na její délce L :

$$\varphi(500 \text{ mm}) = (M_k L)/(G J_k) = (10000 \times 500)/(80769 \times 800) = 0,07738 \text{ rad} = 4,43^\circ.$$

V dalších případech se úhly liší pouze v poměru délek L :

$$\varphi(1000 \text{ mm}) = 0,15476 \text{ rad} = 8,87^\circ, \quad \varphi(5000 \text{ mm}) = 0,7738 \text{ rad} = 44,335^\circ.$$

B) Stísněné kroucení (jeden konec tyče je vetknutý v tuhé konstrukci, volný konec je zatížen momentem $M_k = 10\,000 \text{ Nmm}$)

Odpovídající ekvivalentní kroučící síly jsou: $F = M_k/h = 10000/100 = 100 \text{ N}$.

Konstanta

$$\beta = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{1}{1+\mu} \frac{J_k}{J_z}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{1}{1+0,3} \frac{800}{166667}} = 0,0006076 \text{ mm}^{-1}.$$

$$1/\beta = 1/0,00060764 = 1645,7 \text{ mm}.$$

Poznámka. Délka pásma ovlivněného vetknutím je přibližně $3/\beta = 4937 \text{ mm}$.

Maximální ohybový moment v přírubě: $M_{z,\max} = M_k/(\beta h) =$

$$10000/(0,00060764 \times 100) = 164571 \text{ Nmm}, \text{ maximální ohybové napětí } \sigma_{\max} = M_{z,\max}/W_z = 164571/3333,3 = 49,37 \text{ MPa}.$$

Úhel pootočení volného konce tyče v závislosti na její délce L :

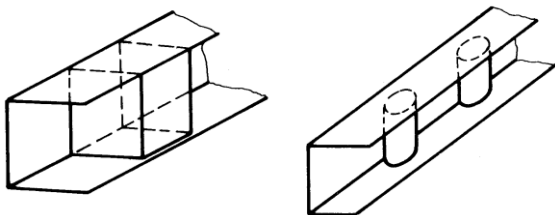
$$\begin{aligned} \varphi(x=500 \text{ mm}) &= \frac{M_k}{G J_k} \left[x + \frac{1}{\beta} (e^{-\beta x} - 1) \right] = \\ &= \frac{10000}{80769 \times 800} \left[500 + 1645,7 (e^{-0,0006076 \times 500} - 1) \right] = 0,01065 \text{ rad} = 0,6102^\circ. \end{aligned}$$

Pootočení v dalších dvou vzdálenostech, vypočtená podobně, jsou: $\varphi(1000 \text{ mm}) = 0,038784 \text{ rad} = 2,2221^\circ$, $\varphi(5000 \text{ mm}) = 0,53132 \text{ rad} = 30,4426^\circ$.

Na obr. 2.2 na straně 32 je znázorněn úhel pootočení volného konce v závislosti na délce profilu pro stísněné i volné kroucení v tomto příkladu. Vidíme, že pro délky $L > 4000 \text{ mm}$ (tj. srovnatelné s hodnotou $3/\beta$) je rychlost nárůstu úhlu pootočení s délkou prutu v obou případech prakticky stejná.

Poznámka. Ve vzorcích (2.5) – (2.11) je všude bezrozměrový argument βx

Z tohoto příkladu, resp. z porovnání úhlu pootočení při volném a stísněném kroucení, je zřejmé, že pokud bychom chtěli výrazněji zvýšit tuhost otevřeného profilu pomocí přivařených přepážek nebo jiných antideplanátorů (obr. 2.3), musí být jejich vzájemné vzdálenosti o mnohem menší než $1/\beta$.



Obr. 2.3. Příklady antideplanátorů pro zvýšení tuhosti v kroucení [4].

Literatura ke kapitole 2.

- 1 Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
- 2 Janatka, J.: Přímé tenkostěnné nosníky. SNTL, Praha, 1961. 160 s.
- 3 Timošenko, S. P.: Soprotivlenije materialov II. Nauka, Moskva, 1965. 480 s. (překlad: Strength of materials. Part II. Advanced theory and problems. D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1956.
- 4 Čalkovský, A.: Únosnost tenkostěnných konstrukcí. Stavba strojů 94. DT ČSVTS, Praha, 1984. 130 s.

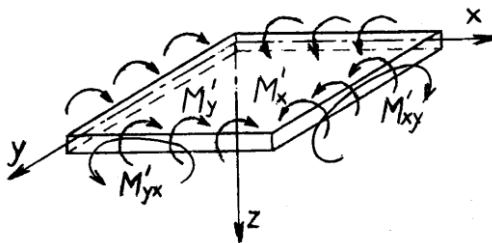
3. Desky, membrány a skořepiny

V kapitolách 1 a 2 jsme si připomněli, jaká napětí a deformace vznikají v prutech a nosnících. Zde ukážeme charakteristické rysy napjatosti základních typů tenkostěnných těles.

3.1 Tenké desky

Tenké desky jsou rovinná tělesa, jejichž tloušťka je mnohem menší než druhé dva rozměry. Bývají zatíženy silami působícími kolmo k jejich rovině, a přenášejí zejména ohybové momenty, ale také krouticí momenty a příčné síly, vyvolávající smyková napětí. Někdy působí normálové nebo smykové síly i v rovině desky. (Pokud v rovině desky působí všechny síly, používá se označení stěna.)

Teorie ohybu desek je složitější než u nosníků, a lze ji najít v literatuře, např. [1 – 4]. Zde jenom ukážeme, čím se od sebe liší napjatost tenkých desek a štíhlých nosníků. Obdélníková deska je schematicky znázorněna na obr. 3.1. U prutu převládá délka, a rozměry v příčném směru jsou malé; u tenké desky převládají rozměry ve dvou směrech v rovině desky, a tloušťka t je malá. Zatímco u nosníku závisí ohybový moment v určitém průřezu pouze na souřadnici ve směru jeho podélné osy x , u desky se může měnit ve dvou směrech, x , y . Proto se zde užívá moment připadající na jednotku šířky střední plochy, který má rozměr Nm/m ($= \text{N}$), a zde jej budeme značit M_x' nebo M_y' . Mohou zde být i krouticí momenty M_{xy}' , viz dále. V nosníku působí normálové ohybové napětí σ_x ve směru x , v desce působí normálová napětí ve dvou směrech (σ_x , σ_y) a popřípadě i smyková napětí τ_{xy} . Podobně existuje i zakřivení desky ve dvou směrech a má poloměry r_x , r_y .



Obr. 3.1. Tenká deska zatížená ohybovými a krouticími momenty.

Prostřednictvím příčné kontrakce (μ) jsou spolu také vázány deformace i napětí v obou směrech. Hookeův zákon pro rovinnou napjatost je

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (3.1)$$

popř.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (3.2)$$

G je modul pružnosti ve smyku, který je vázaný s Youngovým modulem vztahem $G = E/[2(1+\mu)]$.

Mezi ohybovým momentem a křivostí neutrální osy nosníku platí rovnice (1.26). U desek můžeme odvodit podobné vztahy. Vyjádříme-li napětí a elementární síly ve vzdálenosti z od neutrální plochy pomocí poměrných přetvoření (3.2) a křivostí střední plochy ve směrech x a y , dostaneme po úpravě a integrování přes tloušťku desky t vztahy pro jednotkové ohybové momenty,

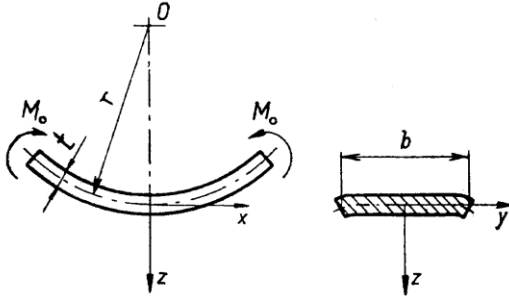
$$M_x' = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right); \quad M_y' = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right). \quad (3.3)$$

Porovnejme je se vztahem (1.26) pro nosník obdélníkového průřezu: $J = bh^3/12$, kde h je výška a b šířka, takže tuhost v ohybu je $EJ = Ehb^3/12$; nyní uijeme t místo h . Ve vztazích (3.3) pro tenkou desku vystupuje tzv. ohybová tuhost průřezu

$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{t^3}{12} = D. \quad (3.4)$$

Tato tuhost se zde vztahuje – podobně jako ohybové momenty – k jednotkové šířce střední plochy ($b = 1$). Proto se u ní na rozdíl od nosníku nevyskytuje b . Ještě dva další rozdíly existují. Za prvé, ve jmenovateli vztahů (3.3) a (3.4) je navíc člen $(1 - \mu^2)$. To znamená, že deska klade o něco větší odpor ohýbání, než by kladl nosník stejné šířky. Zatímco při ohybu poměrně úzkého nosníku se jeho šířka b v různých vzdálenostech od neutrální osy může volně měnit úměrně součiniteli příčné kontrakce μ , a osa průřezu v příčném směru se také mírně prohne (obr. 1.10 vpravo), u široké desky se v místech vzdálených od bočních okrajů nemůže šířka změnit, ani osa prohnout v příčném směru. Deska se deformuje přibližně do tvaru části válcové plochy. To má za následek, že v příčném směru y také vzniknou napětí, a to o velikosti $\mu\sigma_x$. To vyžaduje sílu navíc. Určitou výjimkou jsou okraje. Má-li ohýbaná deska volné boční okraje, nebude na nich působit žádné napětí,

takže ve velmi úzké oblasti podél nich se deska také trochu prohýbá (obr. 3.2 vpravo). Můžeme to vidět, jestliže ohýbáme list papíru a díváme se ve směru ohýbání pozorně na jeho okraje.



Obr. 3.2. Ohyb široké desky. Příčný řez vpravo ukazuje ohnutí u volných okrajů [1].

Druhý rozdíl desky vůči nosníkům je, že příčné zatížení v ní může vyvolat i krouticí momenty (M_{xy}') a smyková napětí (τ_{xy}), a platí

$$M_{xy}' = \frac{E}{(1 + \mu)} \frac{t^3}{12} \varrho ; \quad \varrho = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ; \quad (3.5)$$

ϱ je zkrut, w je průhyb.

Maximální napětí na povrchu se z jednotkových momentů vypočítají podle vztahů

$$\sigma_{x, \max} = \pm \frac{6M_{x'}}{t^2} ; \quad \sigma_{y, \max} = \pm \frac{6M_{y'}}{t^2} ; \quad \tau_{xy, \max} = \pm \frac{6M_{xy}'}{t^2} \quad (3.6)$$

Působí-li v desce příčné síly, vyvolávají v ní smyková napětí τ , rozložená napříč průřezu podle paraboly, podobně jako u nosníků úzkého obdélníkového průřezu (viz obr. 1.17 v kapitole 1). Na obou površích ($z = \pm t/2$) je τ rovno nule a v neutrální rovině ($z = 0$) je maximální, o velikosti $\tau_{\max} = (3/2)\tau_{\text{stř}}$, kde $\tau_{\text{stř}} = T/S$ je průměrná hodnota smykového napětí v průřezu.

Zvláštním případem jsou kruhové desky s rotačně symetrickým zatížením. V nich působí jenom příčné síly a ohybové momenty v radiálním a obvodovém směru; ke zkřucování nedochází. Všechny veličiny závisí pouze na vzdálenosti r od osy a řešení je jednodušší; viz např. [1, 5].

3.2 Ortotropní desky

Desky, probírané v předchozím odstavci, byly izotropní, se stejnými vlastnostmi ve všech směrech. V mnoha případech se používají desky anizotropní, které mají vlastnosti v různých směrech různé. Jejich průřezové charakteristiky (J , W) závisí na orientaci řezu, pro který se počítají. Takzvané ortotropní desky mají nejvyšší a nejnižší hodnoty těchto charakteristik ve dvou navzájem kolmých směrech. Může se jednat o ortotropii materiálovou (příkladem je dřevo) nebo konstrukční: například tenká deska vyztužená soustavou podélných výztuh nebo spojená s vlnitým plechem (obr. 3.3c); tento způsob se užívá mj. u stěn železničních vagonů pro osobní dopravu. Patří sem i vlnitá lepenka z papíru používaná na krabice a další obaly. Ortotropní desky mají rozdílnou ohybovou tuhost ve dvou kolmých směrech. Jsou-li rozměry a rozteče výztužných prvků malé ve srovnání s rozměry vyšetřované desky, nahrazuje se tato deska ve výpočtech homogenní deskou o ekvivalentních charakteristikách.

Materiálové vlastnosti ortotropní desky v rovině jsou charakterizovány následujícími veličinami:

E_x , E_y – moduly pružnosti materiálu ve dvou vzájemně kolmých směrech x , y , odpovídajících osám desky,

μ_x , μ_y – Poissonova čísla, vyjadřující v prvním případě (μ_x) poměr relativního zúžení ve směru y k poměrnému prodloužení ve směru x při zatížení ve směru x . Ve druhém případě (μ_y) jde o poměr relativního zúžení ve směru x k poměrnému prodloužení při zatížení ve směru y ,

G – modul pružnosti ve smyku.

Vztah mezi Poissonovými čísly a moduly pružnosti je

$$\mu_y E_x = \mu_x E_y, \text{ resp. } \mu_y = \mu_x E_y / E_x. \quad (3.7)$$

Hookeův zákon pro dvouosou napjatost je

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \mu_x \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_y}(\sigma_y - \mu_y \sigma_x), \quad \gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (3.8)$$

Při ohybu široké desky je zabráněno příčné kontrakci, a platí $\sigma_y = \mu_y \sigma_x$. V Hookeově zákonu (3.8) je pak nutno nahradit moduly E_x a E_y korigovanými hodnotami

$$E_x' = \frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_y}, \quad E_y' = \frac{E_y}{1 - \mu_y \mu_x} . \quad (3.9)$$

Odpovídající výrazy pro ohybové tuhosti jednotkové šířky desky jsou

$$D_x = E_x' J^*, \quad D_y = E_y' J^*, \quad J^* = t^3/12 . \quad (3.10)$$

Zjednodušení výpočtů se dosáhne zavedením tzv. efektivních tlouštěk stěny t_{ef} : k tloušťce stěny t se připočítá fiktivní tloušťka, stanovená jako plocha výztuhy dělená roztečí výztuh:

$$t_{x,ef} = t + \frac{S_{vx}}{b_x}, \quad t_{y,ef} = t + \frac{S_{vy}}{b_y}, \quad (3.11)$$

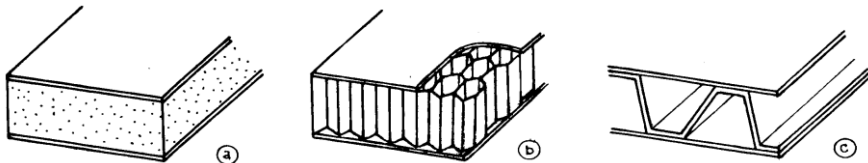
kde S_{vx} , S_{vy} je plocha výztuhy ve směru osy x , resp. y , a b_x , b_y je rozteč výztuh v těchto směrech.

Poznámka. Při uvažování ortotropie ve všech třech směrech by bylo devět materiálových konstant, tj. i pro směr kolmý k rovině desky.

Více se lze o deskách dočíst např. v [1 – 6].

3.3 Sendvičové prvky

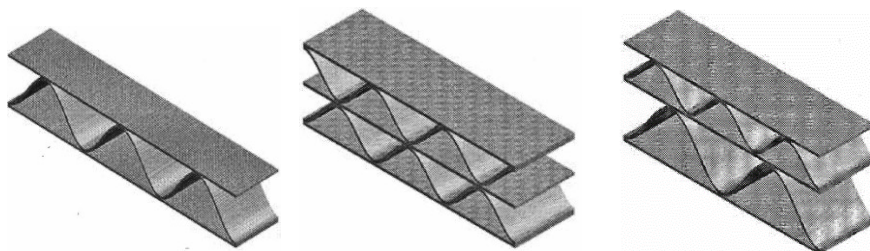
Desky i skořepiny (viz dále) jsou obvykle homogenní, se stejnými vlastnostmi v celé tloušťce. Někdy se ale vytvářejí jako vícevrstvé. Sem patří například vláknové kompozity (lamináty), kde jednotlivé vrstvy jsou tvořeny maticí, ve které jsou uložena vlákna, jež zajišťují požadovanou tuhost a pevnost. Vlastnosti jednotlivých vrstev jsou ortotropní, ale poskládáním na sebe mnoha vrstev s různou orientací vznikne prakticky izotropní díl. O nich bylo pojednáno v kapitole 12 knihy [7]. Jiným případem nehomogenního uspořádání jsou takzvané **sendvičové prvky** a konstrukce (obr. 3.3). Ty sestávají také z několika málo vrstev, jejichž



Obr. 3.3. Sendvičové prvky. *a* – jádro z pěnové hmoty, *b* – vlnitové jádro, *c* – jádro je tvořeno vlnitým plechem [8].

vlastnosti se ale výrazně liší. Vytvářejí se z kovů (plech) nebo plastů, ale i z papírové lepenky, která je popřípadě vhodně impregnovaná. Někdy jsou vrstvy i jádro ze stejného materiálu, někdy jsou rozdílné. Spojují se svařováním, nýtováním, šroubováním nebo lepením.

Vlnitá lepenka na bázi papíru (obr. 3.4) se užívá zejména na různé obaly, mimo jiné proto, že poměrně dobře zmírňuje účinky nárazu na přepravovaný předmět. Jsou ale možné i jiné materiály.

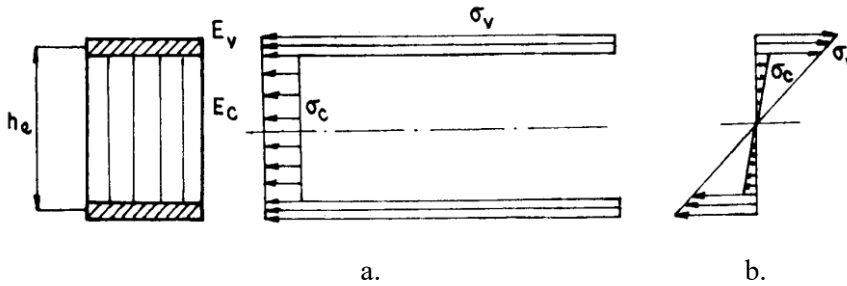


Obr. 3.4. *Různé druhy vlnité lepenky [9].*

Dále se omezíme na sendviče sestávající ze tří vrstev. Hlavním úkolem krajních vrstev je přenášet zatížení, úkolem střední vrstvy (jádra) je zajistit jejich potřebnou vzdálenost, a tedy i tuhost sendviče. Jednotlivé vrstvy ale mohou plnit i další úkoly.

Základní typy výplně jsou naznačeny na obr. 3.3: a) výplň z pěnového materiálu, b) voštinová výplň, c) vlnitá výplň. Zatímco v případě a) jsou vlastnosti výplně izotropní, v případě b) jsou mírně, a v případě c) silně anizotropní, takže při jejich užití je nutno respektovat charakter přenášení sil konstrukcí. Výplně se také liší tím, do jaké míry jsou schopné přenášet příčné síly a tlak působící na vnější vrstvy.

Na obr. 3.5a je znázorněno rozložení napětí napříč třívrstvou deskou zatíženou v jednom směru tahem, obr. 3.5b odpovídá zatížení ohybem. Jednoduchá situace je při zatížení tahem; F_1 je síla na jednotku šířky desky, σ_v je napětí v krajní vrstvě, t_v je tloušťka jedné vrstvy, σ_c je střední napětí v jádře, a h_c je jmenovitá výška jádra. Modul pružnosti materiálu vrstev, E_v , je zpravidla znám. Modul pružnosti jádra, E_c , je někdy znám (je-li jádro například z pěnového polystyrenu), ale někdy ne, například u jádra voštinového. Protože deformace a přetvoření vrstev i jádra jsou stejné, $\varepsilon = \varepsilon_v = \varepsilon_c$, je možno vypočítat ekvivalentní modul pružnosti jádra podle vztahu



Obr. 3.5. Rozložení napětí v sendviči při zatížení: a) tahem, b) ohybem.
v – vrstva, c – jádro [8].

$$E_{c,ekv} = \frac{F_1 - 2\varepsilon E_v t_v}{h_c \varepsilon} = E_{stř} - 2E_v \frac{t_v}{h_c}, \quad (3.12)$$

kde $E_{stř} = F_1/(h_c \varepsilon)$ je průměrný modul pružnosti celé trojvrstvé desky.

Při namáhání ohybem je důležitý moment setrvačnosti a modul průřezu v ohybu. Sendvič se dvěma stejnými krajními vrstvami tloušťky t_v z materiálu o modulu pružnosti E_v , a jádrem tloušťky (výšky) h_c z materiálu o modulu pružnosti E_c podle obr. 3.5b, má kvadratický moment průřezu v ohybu, vztažený na jednotku šířky

$$J_1 = \frac{1}{12} (h_c^3 + 2t_v^3) + \frac{1}{2} t_v (h_c + 2t_v)^2, \quad (3.13)$$

a modul průřezu

$$W_1 = J_1 / (t_v + h_c / 2). \quad (3.14)$$

Při zatížení sendvičového prvku tahem nebo ohybem, jsou vnitřní síly a napětí přenášeny hlavně krajními vrstvami, a namáhání jádra je malé. Působí-li ale na sendvič příčné zatížení, musí být jádro schopné přenášet i smykové síly.

Vyrábějí se i sendviče s různými tloušťkami nebo vlastnostmi obou krajních vrstev nebo i sendviče s více vrstvami. Naopak v některých případech se používají součásti „dvouvrstvé“, kdy na masivním základu je nanášena relativně tenká povlaková vrstva, jejímž úkolem je dodat tělesu speciální vlastnosti chemické (protikorozní ochrana), mechanické, tepelné nebo optické. V tomto případě odkážeme čtenáře na podrobnou monografii [10].

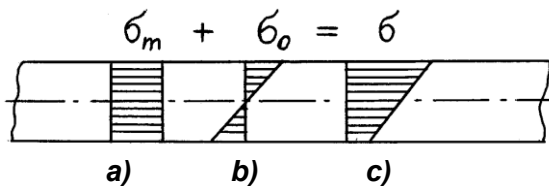
3.4 Membrány a tenkostěnné skořepiny

Skořepiny jsou tělesa plošného charakteru, která mají jeden rozměr (tloušťku) mnohem menší než druhé dva, a střední plochu zakřivenou v jednom nebo ve dvou směrech. Jako příklady lze uvést různé zásobníky, nádrže, tlakové nádoby, potrubí, ale i části karosérií vozidel nebo trupů letadel.

Skořepiny jsou často zatíženy tlakem působícím na jejich plochu, ale mohou působit i další síly. Zatížení v určitém místě stěny vyvolává její a) prodlužování nebo zkracování, a b) ohýbání. V souladu s tím můžeme rozlišovat dva druhy napětí (obr. 3.6):

- a) **napětí membránová**, σ_m , rozdělená rovnoměrně napříč tloušťkou (obr. 3.6a),
- b) **napětí ohybová**, σ_o , měnící se lineárně napříč tloušťkou a rovná nule na střední ploše (obr. 3.6b).

Výsledné napětí σ (obr. 3.6c) je rovno součtu obou složek.



Obr. 3.6. Napětí ve skořepině: a – membránové, b – ohybové, c – celkové.

Srovnáme-li obě složky napětí, vidíme, že schopnost materiálu přenášet síly a napětí je nejlépe využita membránovými napětími, která jsou rozložena rovnoměrně napříč tloušťkou stěny. Ohybová napětí jsou maximální na povrchu, zatímco v blízkosti střední plochy jsou nízká, a na ní jsou rovna nule. Při dimenzování se vychází z maximálních hodnot napětí, a z tohoto hlediska není při ohybové napjatosti materiál dostatečně využit. Proto se například velké zásobníky a nádrže snažíme dělat tak, aby v jejich co největší části byla napjatost membránová. Podmínky pro dosažení membránové napjatosti jsou následující: 1) tvar tělesa musí být bez náhlých změn, 2) tloušťka stěny a poloměry křivosti střední plochy musí být konstantní nebo se měnit plynule. 3) Přenos sil, například v místech upevnění, by se měl dít ve směrech tečných ke střední ploše. Na druhou stranu, jestliže u nádoby z houževnatého materiálu s čistě membránovou napjatostí dosáhnou napětí ve stěně meze kluzu a pevnosti, může dojít k roztržení stěny,

neboť tam byla minimální rezerva únosnosti. Naopak, převládá-li v nějakém místě napjatost ohybová a jedná-li se o materiál tvárný, k žádné havárii při dosažení nebo překročení meze kluzu nemusí dojít. V povrchových vrstvách s nejvyšším napětím začne materiál plasticky téci a přizpůsobuje se deformování. Příslušný průřez tak je schopen přenést o dost vyšší moment, než při kterém maximální napětí v povrchové vrstvě dosáhlo meze kluzu (viz kapitolu 4 v [7]). Podmínkou ovšem je, aby materiál měl dostatečnou tažnost.

Jestliže tenká stěna nemá žádnou ohybovou tuhost, je schopna přenášet pouze membránová napětí, a označujeme ji jako membránu. Má-li určitou ohybovou tuhost, označujeme ji jako skořepinu. Obou druhů napjatostí si všimneme blíže.

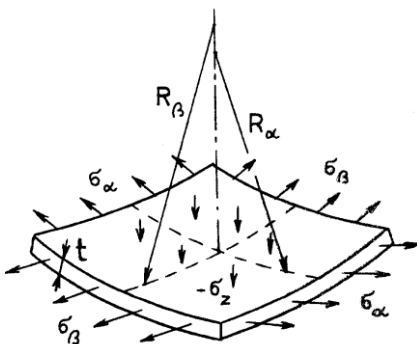
3.5 Membránová napjatost, Laplaceova rovnice

Obr. 3.7 ukazuje malý element vyříznutý z tenké membrány dvěma páry rovnoběžných řezů ve směrech α , β . Jsou zde znázorněna membránová napětí, o kterých předpokládáme, že jsou napříč tloušťkou rozložena rovnoměrně. Na element může působit i spojitě rozložený tlak p , označený na obrázku jako radiální napětí $-\sigma_z$. Po sestavení rovnice rovnováhy sil do směru kolmého k tečné rovině a po úpravě dostaneme tzv. Laplaceovu rovnici membrány [11],

$$p = t \left(\frac{\sigma_\alpha}{R_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{R_\beta} \right); \quad (3.15)$$

t je tloušťka stěny, σ_α , σ_β jsou tečná napětí ve dvou navzájem kolmých směrech α , β , a R_α , R_β jsou poloměry křivosti membrány. Poloměr dosazujeme jako kladný, je-li membrána v příslušném směru vypouklá, a jako záporný u membrány vyduuté.

Poznámka. Někdy se membránová napjatost označuje jako bezmomentová.



Obr. 3.7. Geometrie membrány a napětí. $\sigma_z = -p$ je radiální napětí.

Membránová napjatost se vyskytuje například ve válcových tlakových nádobách v místech vzdálených od čel. Tohoto případu si všimneme blíže.

3.6 Tenkostěnná válcová tlaková nádoba

Situace je znázorněna na obr. 3.8. Přetlak uvnitř nádoby způsobuje v plášti napětí ve směru obvodovém a osovém. Napětí σ_a v osovém směru v uzavřené nádobě dostaneme z rovnice rovnováhy sil působících v tomto směru na část oddělenou myšleným řezem (obr. 3.8):

$$p\pi R^2 - \sigma_a 2\pi R t = 0, \quad (3.16)$$

kde p je přetlak v nádobě, R a t jsou poloměr a tloušťka stěny. Odsud vyplyne osové (axiální) napětí

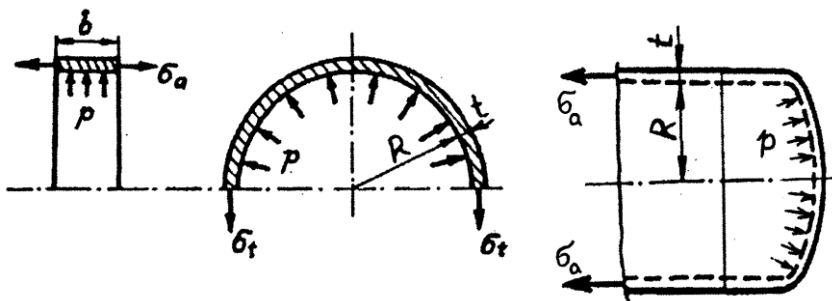
$$\sigma_a = \frac{pR}{2t}. \quad (3.17)$$

V obvodovém směru působí napětí obvodové σ_t . Vyřízneme-li myšleným řezem z válcové části vzdálené od čel prstenec o šířce b (obr. 3.8), omezíme se na jeho polovinu, připojíme působící síly a napíšeme rovnici rovnováhy sil do směru kolmého k ose,

$$2 p R b - 2\sigma_t b t = 0,$$

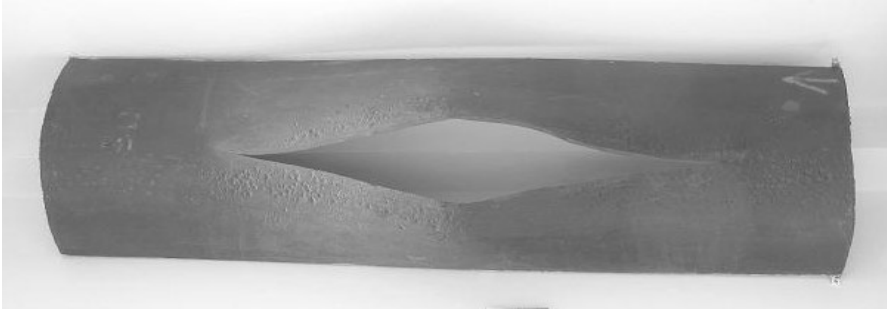
dostaneme po vykrácení b a po úpravě vzorec pro obvodové napětí:

$$\sigma_t = \frac{pR}{t}. \quad (3.18)$$



Obr. 3.8. Válcová tenkostěnná nádoba s vnitřním přetlakem.
 σ_a – osové napětí, σ_t – obvodové napětí, t – tloušťka stěny.

Toto napětí je dvakrát vyšší než napětí osově. Proto se tlaková nádoba zpravidla roztrhne tak, jak ukazuje obr. (3.9), tj. s trhlinou probíhající kolmo k největšímu tahovému napětí, tedy obvodovému. V blízkosti čel je napjatost složitější a všimneme si jí později.

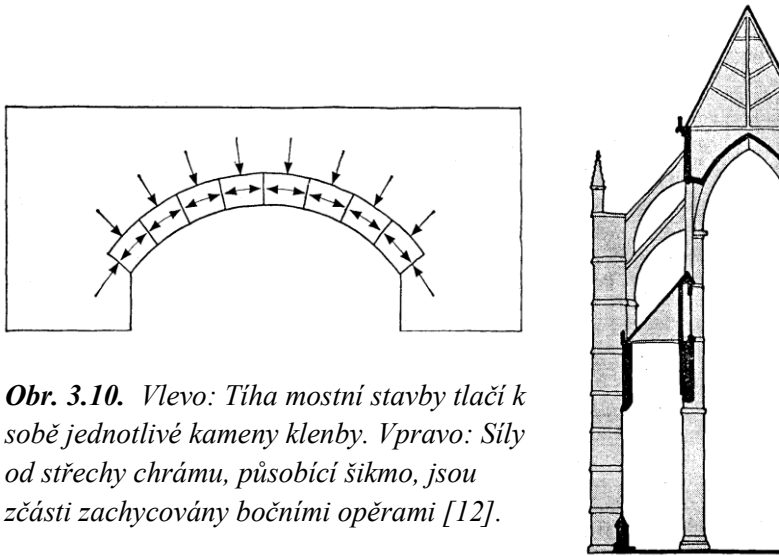


Obr. 3.9. Potrubí dálkového plynovodu roztržené při tlakové zkoušce. Vystaveno na fakultě strojní ČVUT v Praze.

Vztahy (3.17) a (3.18) se někdy označují jako kotlové vzorce. Je-li válcová nádoba otevřená, jako například nádrž na vodu, vyvolá tlak působící na povrch stěny jenom napětí v obvodovém směru; neuvažujeme-li tíhu pláště, bude osově napětí rovno nule.

Působí-li přetlak uvnitř nádoby, vyvolává v její stěně napětí tahová. Jestliže ale působí tlak na stěnu zvenčí, jako například u ponorky, budou v plášti působit napětí o stejné velikosti, ale opačného znaménka, tedy tlaková.

To nám pomůže také například pochopit, proč se nezřítí starý most jenom poskládaný z kamenů vhodného tvaru (obr. 3.10). Podobným případem jsou klenby ve zdech starých budov z dob, kdy nebyly dostupné materiály o vysoké pevnosti v tahu nebo ohybu, a hlavním materiálem na velké stavby byl kámen. Proč u těchto staveb nevypadnou kameny vlastní tíhou, i když nejsou drženy pohromadě žádnou maltou? Při pohledu na obrázek 3.10 vlevo pochopíme, že kruhový prstenec z kamenů uspořádaných podobným způsobem a zatížený zvenčí rotačně symetricky tlakem, bude držet pohromadě, neboť mezi jednotlivými kameny působí tlakové síly. Situace je opačná než ve stěně válcové tlakové nádoby (obr. 3.8); tlak zvenčí nyní vyvolává v obvodovém směru tlakové síly. Oblouk mostu nebo kamenná klenba (obr. 3.10) odpovídá části prstence. Ovšem pokud by tento oblouk stál osamoceně a zatížení působilo jenom ve svislém směru, rozlomil by se

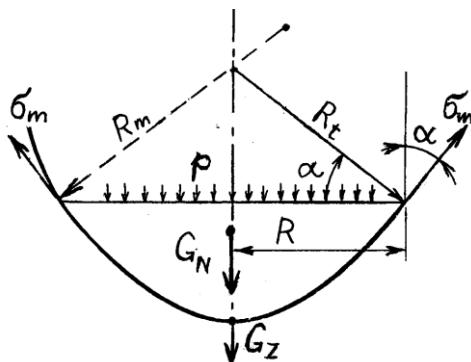


Obr. 3.10. Vlevo: Tíha mostní stavby tlačí k sobě jednotlivé kameny klenby. Vpravo: Síly od střechy chrámu, působící šikmo, jsou zčásti zachycovány bočními opěrami [12].

a zřítit vlastní tíhou. Na jednotlivé kameny vhodného tvaru tedy musí působit síly směřující zcela nebo alespoň přibližně v radiálním směru dovnitř, a materiál vně oblouku musí bránit jakémukoliv posunutí jednotlivých kamenů ve směru vodorovném. U mostních konstrukcí hraje tuto úlohu násep (obr. 3.10 vlevo). Podobná situace je i u obloukovitých otvorů (například oken) ve stěnách středověkých budov, kde tuto opěrnou roli přebírá zdivo. Někdy, jako u kamenných chrámů, kde se síly od tíhy střechy snaží vyvrátit zdi do stran (obr. 3.10 vpravo), se ke zvýšení bezpečnosti užívaly navíc opěrné sloupky přistavěné vně kostelní budovy. Neslouží tedy jen pro ozdobu, ale mají ryze praktický důvod. Nesmíme zapomenout, že ve středověku neměla malta vysokou pevnost v tahu, i když se do ní někde (snad) přidávala vejce.

3.7 Tenkostěnné rotačně symetrické nádoby

Tyto nádoby se vyskytují poměrně často. Jejich tvar vzniká rotací tvořící křivky kolem osy (obr. 3.11); i kulová nádoba, které si všimneme dále, sem patří. Střední plocha je zakřivena ve dvou směrech, a ve vyšetřovaném bodě můžeme rozlišit dva poloměry křivosti: R_t v obvodovém směru a R_m v meridiánovém (poledníkovém) směru. Pro poloměr R v rovině kolmé k ose platí $R = R_t \cos \alpha$. Směr obvodový a meridiánový jsou hlavní směry (R_t a R_m mají extrémní hodnoty) a při rotačně symetrickém zatížení v nich působí pouze normálová hlavní napětí. V jinak orientovaných řezech mohou ve stěně působit i smyková napětí.



Obr. 3.11. Řez tenkostěnnou rotačně symetrickou nádobou.

Z rovnice rovnováhy sil sestavené pro část nádoby oddělenou řezem kolmým k ose (obr. 3.11) dostaneme po úpravě meridiánové napětí:

$$\sigma_m = \frac{p\pi R^2 + G_N + G_Z}{2\pi R t \cos \alpha}; \quad (3.19)$$

p je tlak nad hladinou, R je poloměr nádoby v místě řezu, t je tloušťka stěny, G_N je tíha náplně v oddělené části, a G_Z je tíha odříznuté části nádoby a částí s ní spojených. Všechny tyto veličiny jsou funkcí polohy vyšetřovaného místa.

Z rovnice (3.19) vypočítáme meridiánové napětí σ_m . Po jeho dosazení do upravené rovnice (3.15) dostaneme obvodové napětí σ_t . V některých případech se úloha zjednoduší: u kulové nádoby je $R_m = R_t$, u válcové nádoby je $1/R_m = 0$ apod. I potrubí je vlastně tlaková nádoba. Membránovou rovnicí se řídí také tvar dešťových kapek; p je tlak v kapalině a $\sigma_m = \sigma_t$ je povrchové napětí.

3.8 Tenkostěnná kulová tlaková nádoba

Tenkostěnná kulová nádoba má poloměry křivosti jsou ve všech směrech stejné, $R_\alpha = R_\beta = R$. V plášti také působí ve všech směrech stejné napětí, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$. Dosadíme-li tyto hodnoty do Laplaceovy rovnice (3.15), dostaneme po úpravě

$$\sigma = p \frac{R}{2t}. \quad (3.20)$$

Toto napětí je poloviční než maximální napětí σ_t ve válcové nádobě. Je to proto, že sílu, vyvozenou tlakem, zachycují u válcové nádoby pouze napětí v obvodovém směru, kdežto u kulové nádoby ji zachycují síly ve dvou řezech navzájem kolmých

(obr. 3.7). Kulová nádoba pro uskladnění tekutiny o tlaku p by tedy mohla mít poloviční tloušťku než válcová. Přesto se častěji vyrábějí nádoby válcové. Důvody jsou technické. Nádobu z plechu lze snadno vyrobít jeho stočením; vytvoření kulového tvaru je náročnější. (Tyto problémy odpadají u nádob vytvářených laminováním nebo odléváním, kde jsou možné různé tvary.) Válcová nádoba s rovnými čely také lépe využije objem, do kterého je vestavěna, než kulová.

3.9 Membránová a ohybová napětí ve skořepinách

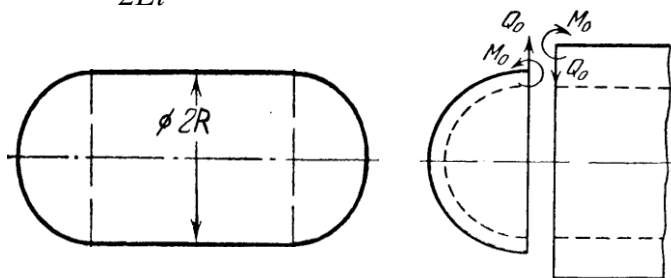
Membránovou napjatost nelze vždy docílit. Ukážeme to na příkladu tenkostěnné válcové tlakové nádoby s půlkulovými dny (obr. 3.12). Poloměr válcového pláště je R , tloušťka stěny obou částí je rovna t , modul pružnosti je E a Poissonovo číslo je μ . Přetlak p uvnitř nádoby vyvolá ve válcovém plášti obvodové napětí σ_α a osové napětí σ_a ; definovaná rovnicemi (3.17) a (3.18). U půlkulového dna má napětí ve všech směrech hodnotu $\sigma = pR/(2t)$.

Účinkem přetlaku dochází také ke zvětšení průměru nádoby. Pokud by válcová část nebyla spojená se dnem, vyplývá z Hookeova zákona pro rovinnou napjatost (3.1), že se její poloměr zvětší o

$$u_v = p \frac{R^2}{2Et} (2 - \mu) . \quad (3.21)$$

Poloměr půlkulového dna by se zvětšil o

$$u_k = p \frac{R^2}{2Et} (1 - \mu) . \quad (3.22)$$



Obr. 3.12. Válcová tlaková nádoba s půlkulovým dnem.

Poměr obou změn je

$$\frac{u_v}{u_k} = \frac{2 - \mu}{1 - \mu} . \quad (3.23)$$

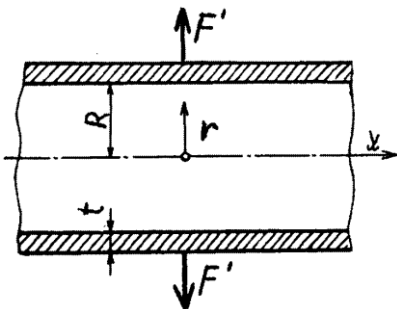
Při stejné tloušťce stěny a běžných materiálech bude změna průměru dna méně než poloviční proti válcové části. Je-li ale dno spojeno s válcovou částí, musí být deformace v místě spojení stejné. Mezi dnem a válcovou částí se proto objeví radiální síly a ohybové momenty, které způsobí, že se poloměr válcové části v oblasti spoje zmenší o něco méně než podle vztahů (3.21), a naopak poloměr dna o něco více než dle (3.22). Působící síly a momenty by šlo zmenšit například tím, že se půlkulové dno udělá méně tlusté (ale tak, aby napětí v něm nepřekročilo přípustnou hodnotu). Není to však nutné, vyjde-li příznivě kontrola napětí v místě spojení.

Poznámka. I když průměr a tloušťka dna a válcové části jsou stejné a mají v místě spojení společnou tečnu, mění se v místě spoje skokem křivost v meridiánovém směru; u válcové části je $1/R_\alpha = 0$, a u půlkulové části je $1/R_\alpha = 1/R$. Podmínka spojitosti poloměrů křivosti pro dosažení membránové napjatosti tedy není ve spoji splněna, a objeví se i napětí ohybová.

Situace v oblasti spoje si nyní všimneme podrobněji. Vydeme při tom ze situace v lokálně zatížené trubce válcového průřezu.

3.10 Rotačně symetrická ohybová napjatost ve válcové skořepině

Mějme válcovou tenkostěnnou trubku zatíženou v jednom místě silou F' radiálního směru, rovnoměrně rozloženou podél obvodu (liniové zatížení na obr. 3.13, rozměr N/m). Tato síla vyvolává zvětšení poloměru. Protože ale stěna trubky má určitou ohybovou tuhost, rozprostírá se zvětšení poloměru (resp. průměru) na obě strany od zatížení. Díky tomuto zvětšení se ve stěně objeví tahové (membránové) napětí v obvodovém směru, které se mění se vzdáleností x od působíště síly takto:



Obr. 3.13. Trubka s lokálním zatížením podél obvodu.

$$\sigma_t(x) = E \varepsilon_t(x) = E \frac{u(x)}{R} . \quad (3.24)$$

Toto napětí brání zvětšování průměru trubky, a jeho účinek je podobný, jako kdyby podél povrchu působilo spojitě rozložené zatížení $q(x)$:

$$q(x) = -k u(x) , \text{ kde } k = E t / R^2 . \quad (3.25)$$

Znaménko mínus je zde proto, že zatížení q má opačný směr než deformace. Situace je podobná jako u nosníku na pružném podkladu, a pro zvětšení poloměru trubky můžeme napsat diferenciální rovnici [1, 3, 13]:

$$u^{IV} = - \frac{k}{E J^*} u . \quad (3.26)$$

Existuje ale jeden rozdíl. Protože u trubky zůstává zachována kruhovitost průřezu, je potlačena příčná kontrakce při prohýbání jejích povrchek ohybovým napětím ve směru osy x . Ohybovou tuhost EJ^* ve jmenovateli výrazu (3.26) proto musíme vyjádřit podobně jako u široké desky, tj.

$$EJ^* = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} . \quad (3.27)$$

Dostaneme tak diferenciální rovnici čtvrtého řádu,

$$u^{IV} = - \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 t^2} u , \text{ resp. } u^{IV} + 4\beta^4 u = 0 , \quad (3.28)$$

kde

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 t^2}} . \quad (3.29)$$

Obecné řešení je:

$$u(x) = e^{\beta x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) . \quad (3.30)$$

Ve větší vzdálenosti od působíště liniové síly F' deformace vymizí. V případě dlouhé trubky proto musí být $A = 0$, $B = 0$, a zůstane tedy jenom část řešení s $e^{-\beta x}$,

$$u(x) = e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) + u_{part} . \quad (3.31)$$

Partikulární integrál u_{part} v tomto případě odpovídá změně poloměru pro značně velké x , tj. $u_{part} = u(x \rightarrow \infty)$. Tato rovnice platí i pro část trubky vlevo od působící síly, s tím že i zde se vzdálenost od ní dosazuje jako kladná. Kvůli této symetrii musí být $u'(x=0) = 0$. S přihlédnutím ke Schwedlerově větě platí $u'''(x=0) = F'/(2EJ)$. S těmito okrajovými podmínkami dostaneme

$$u(x) = F' \frac{\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + u_{part} , \quad (3.32)$$

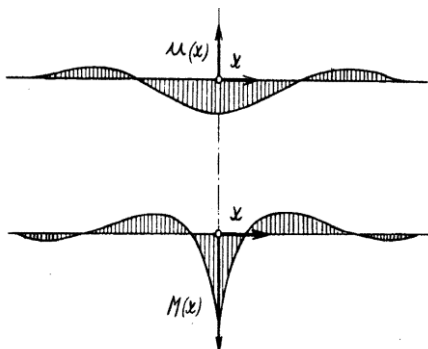
$$M_a(x) = -u'' EJ^* = F' \frac{\beta^3}{k} EJ^* e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) . \quad (3.33)$$

Průběh obou veličin je zvlněný, s klesající amplitudou (obr. 3.14). Změna poloměru se kolem počátku souřadného systému mění plynule, čára momentu se zde lomí. Amplitudy poklesnou na 5% své maximální velikosti (tj. $e^{-\beta x} = 0,05$) při $\beta x \approx 3$. Tomu odpovídá vzdálenost $x = 3/\beta$, což s přihlédnutím ke vzorci (3.30) je

$$x = \frac{3}{\beta} = \frac{3\sqrt{Rt}}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} . \quad (3.34)$$

Například pro ocel ($\mu = 0,3$) dostaneme

$$x^* = 2,334 \sqrt{Rt} . \quad (3.35)$$



Obr. 3.14. Průběh změny poloměru $u(x)$ a ohybového momentu M ve stěně trubky zatížené lokální radiální silou po obvodě.

Zhruba lze říci, že účinky lokálního rotačně symetrického zatížení válcové skořepiny dozní ve vzdálenosti od jeho působišť větší než $2,4\sqrt{(Rt)}$.

Poznámka. Z matematického hlediska nezávisí změny poloměru, momenta a napětí jenom na vzdálenosti x od působišť síly, ale na argumentu βx . Ve výrazech obsahujících sinus, cosinus, exp nebo logaritmus musí být argument vždycky bezrozměrový. Jinak by se při změně měřítka (např. z metrů na milimetry) změnila i číselná hodnota výsledku. Budeme-li ve vztahu (3.31) dosazovat R a t v mm, bude β mít rozměr mm^{-1} , a x musíme dosazovat také v mm. Při dosazování všech veličin v metrech bude β mít rozměr m^{-1} .

Amplituda $F'\beta/2k$ ve vzorci (3.32) vyjadřuje změnu poloměru v počátku souřadného systému ($\beta x = 0$). S přihlédnutím ke vztahu (3.25) pro k a vztahu (3.29) pro β ji můžeme zapsat jako

$$u(0) = F' \frac{\beta}{2k} = \frac{F'}{2E} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \left(\frac{R}{t}\right)^{3/2} \approx 0,6427F' \left(\frac{R}{t}\right)^{3/2}; \quad (3.36)$$

konstanta 0,6427 vpravo odpovídá Poissonovu číslu $\mu = 0,3$.

Podobně lze vyjádřit amplitudu momentu ve vztahu (3.33):

$$M_a(0) = F' \frac{\beta^3}{k} EJ^* = F' \frac{\sqrt{Rt}}{4\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} EJ^* \approx 0,1945F' \sqrt{Rt}; \quad (3.37)$$

konstanta 0,1945 vpravo odpovídá opět Poissonovu číslu $\mu = 0,3$.

Teorii odezvy tenkostěnné válcové skořepiny na lokální zatížení podél obvodu lze aplikovat také v oblasti jejího konce, například v místě spojení se dnem nebo jinou skořepinou. Vztahy (3.32) a (3.33), resp. (3.36) a (3.37) platí přibližně i pro půlkulové dno nebo pro skořepinu tvaru strmého kužele, protože zvýšená napětí v místě spoje se utlumí dříve, než se výrazněji změní průměr těchto skořepin. Rychlost útlumu uvidíme v následujícím příkladu.

Příklad. Stanovte délku ovlivněné části od místa spoje ocelové tenkostěnné válcové skořepiny s parametry: $R = 500$ mm, $t = 5$ mm.

Řešení. Délka ovlivněné oblasti je $x^* = 2,4\sqrt{(Rt)} = 2,4\sqrt{(500 \times 5)} = 120$ mm. V této délce se průměr kulové nebo strmé kuželové skořepiny změní jen málo. Dochází-li k podobnému lokálnímu působení v místech vzdálených od okraje, je možné zjednodušené řešení aplikovat, je-li délka trubky minimálně dvakrát větší, tj. 240 mm. Samozřejmě pro skořepinu kulovou nebo kuželovou existují i přesnější (a

složitější) analytické vztahy [13 – 18], a velmi přesné výsledky dostaneme také metodou konečných prvků [19], která může navíc lépe přihlížet ke skutečným podmínkám spojení skořepiny s dalšími částmi.

Poznámka. Průběh s relativně rychlým útlumem vzniká jen při rotačně symetrickém lokálním zatížení. Jestliže vnější zatížení v radiálním směru působí pouze na části obvodu, bude oblast jeho doznívání mnohem větší. Volný okraj rotačních skořepin je poměrně tuhý jenom při rotačně symetrickém zatížení. Působí-li na něj osamělá příčná síla, snadno se prohne. Proto se takového okraje vyztužují, obvykle pomocí masivnějších prstenců nebo vhodným tvarováním; viz např. obr. 6.9 na straně 100 v kapitole 6.

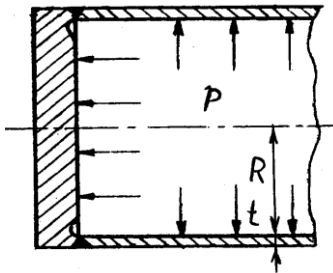
V oblasti ovlivněné upevněním skořepiny nebo spojením s jinými částmi se objeví několik druhů napětí:

- A. obvodové (membránové) napětí rozložené rovnoměrně napříč tloušťkou stěny,
- B. ohybové napětí ve směru x , způsobené tím, že se površka v tomto směru prohýbá,
- C. ohybové napětí v obvodovém směru.

V posledním případě se nejedná doslova o ohybové napětí; říká se mu tak proto, že je rozloženo napříč tloušťkou stěny podobně jako napětí při ohybu. Je způsobené tím, že u kruhového průřezu nemůže v příčném, tj. obvodovém směru docházet k příčné kontrakci jednotlivých vrstev. Velikost ohybového napětí v obvodovém směru v jakémkoliv bodě je rovna μ -násobku ohybového napětí v osovému směru.

Určitou představu o těchto napětích získáme řešením následující úlohy.

Příklad. Tenkostěnná válcová ocelová tlaková nádoba je spojena s masivními čely podle obr. 3.15. Vypočítejte napětí způsobená vnitřním přetlakem $p = 1,0$ MPa. Poloměr nádoby je $R = 0,5$ m, tloušťka stěny $t = 5$ mm, $E = 200\,000$ MPa, $\mu = 0,3$.



Obr. 3.15. Tenkostěnná válcová tlaková nádoba s masivními dny. Zahloubení ve dně slouží ke snížení koncentrace napětí.

Řešení. Postupně vypočítáme jednotlivé složky napětí, a potom výsledné hodnoty:

1.) Membránová napětí. Dosadíme-li hodnoty p , R (a t do kotlových vzorců (3.17) a (3.18), dostaneme obvodové a osové napětí:

$$\sigma_{t,m} = 100 \text{ MPa} , \quad \sigma_{a,m} = 50 \text{ MPa} .$$

2.) Tato napětí by vyvolala volnou změnu poloměru nádoby. Její velikost dostaneme po dosazení příslušných hodnot do vztahu (3.21)

$$\Delta R = 1,0 \times \frac{500^2}{2 \times 200000 \times 5} \times (2 - 0,3) = 0,2125 \text{ mm} .$$

3.) Zabránění změně poloměru v místě spoje válcové části s „tuhým“ čelem (tj. o ΔR) je stejné, jako kdyby zde podél obvodu působila spojitě rozložená radiální síla F' . Úpravou vztahu (3.36) dostaneme:

$$F' = \frac{u}{0,6427} E \left(\frac{t}{R} \right)^{3/2} = \frac{0,2125}{0,6427} 200000 \left(\frac{5}{500} \right)^{3/2} = 66,13 \text{ N / mm} .$$

To je poměrně velmi vysoká hodnota.

4.) Maximální ohybové napětí v osově směru v místě vetknutí dostaneme tak, že moment $M_a(0)$ vydělíme modulem průřezu v ohybu pro výšku t a jednotkovou šířku, tj. $W_1 = t^2/6$. Po úpravě obdržíme

$$\sigma_{a,o} = 1,167 F' \frac{\sqrt{Rt}}{t^2} = 1,167 \times 66,13 \frac{\sqrt{500 \times 5}}{5^2} = 154,34 \text{ MPa} .$$

5.) Výsledné maximální napětí v osově směru je rovno součtu ohybového a membránového napětí:

$$\sigma_{a,\max} = \sigma_{a,o} + \sigma_{a,m} = 154,74 + 50 = 204,7 \text{ MPa} .$$

6.) V místě vetknutí také působí v obvodovém směru ohybové napětí, jehož maximální hodnota na povrchu je:

$$\sigma_{t,o} = \mu \sigma_{a,o} = 0,3 \times 154,74 = 46,4 \text{ MPa} .$$

7.) V důsledku zabránění příčné kontrakci ve vetknutí se v obvodovém směru objeví membránové napětí o hodnotě

$$\sigma_{t,m} = \mu \sigma_{a,m} = 0,3 \times 50 = 15,0 \text{ MPa.}$$

8.) Výsledné maximální napětí v obvodovém směru v místě vetknutí je

$$\sigma_{t,\max} = \sigma_{o,t} + \sigma_{m,t} = 46,4 + 15,0 = 61,4 \text{ MPa.}$$

Nejvyšší hodnotu vůbec má maximální napětí v osovém směru na vnitřním povrchu pláště v místě vetknutí: $\sigma_{a,\max} = 204,7 \text{ MPa}$. Je tedy čtyřikrát vyšší než samotné osové membránové napětí, a dvakrát vyšší než membránové napětí obvodové. Má ale převažující složku ohybovou, a proto u nádoby z houževnatého nezpůsobí destrukci, neboť materiál se rostoucím zatížením přizpůsobí lokálním plastickým tečením. (Chování pružnoplastických součástí při překročení meze kluzu je vysvětleno například v knize [7].)

O analytickém řešení napjatosti membrán a skořepin se lze dočíst více například v [3, 13 – 17]. Skořepiny složitější se počítají efektivně s použitím programů metody konečných prvků; úvodní informace o MKP je v [19] nebo v kapitole 2 v [7], některé programy jsou zmíněny v kapitole 6.5.

Poznámka. Tenkostěnné skořepiny se začaly více používat po vynalezení parního stroje a zavedení železnic. (Každý kotel je vlastně tlaková nádoba; podobně i potrubí, ve kterém je médium pod tlakem.) Zpočátku docházelo poměrně často k roztržení kotlů tlakem páry, někdy s fatálními následky. Jakmile ale se začaly při návrhu používat kotlové vzorce (3.17) a (3.18), počet havárií výrazně klesl. Vznikly také normy pro navrhování a provoz tlakových nádob. Kotlové vzorce jsou velice jednoduché, ale platí dostatečně přesně jenom ve válcové části nádoby, v místech vzdálených od čel. Na konci devatenáctého a v první polovině dvacátého století byla propracována teorie tenkostěnných skořepin. A objevil se problém s teorií. Napětí, která působí v oblasti spojení válcové části a čel, vycházejí podle teorie skořepin několikanásobně vyšší než napětí podle kotlových vzorců. A přesto kovové tlakové nádoby a kotle uspokojivě fungovaly, aniž by se trhaly. Jak je to možné? Všechny výpočty v té době byly totiž prováděny za předpokladu elastického chování materiálu a platnosti Hookeova zákona, tj. přímé úměrnosti mezi napětím a přetvořením. Ve skutečnosti, jakmile napětí někde v kovovém plášti dosáhlo meze kluzu, nestoupalo už vůbec nebo narůstalo jen mírně (viz např. kapitolu o plastickém deformování v [5] nebo [7]). Materiál se plastickým tečením přizpůsobil přetížení. Skutečně nejvyšší napětí tak bylo o dost nižší než pevnost materiálu. Pro zvýšení jistoty, že nedojde k havárii, se začaly také provádět tlakové

zkoušky, při kterých je nádoba vystavena přetlaku vyššímu, než jaký je očekáván při provozu. Do provozu pak je uvedena jenom nádoba, která zkouškou úspěšně prošla.

Dnešní výpočty přihlízejí ke skutečnému chování materiálů. Ve dvou případech ale se při návrhu správně uplatní lineárně elastické výpočty. Prvním případem jsou nádoby z křehkých materiálů, jako je například sklo nebo keramika. U těchto materiálů platí Hookeův zákon a přímá úměrnost mezi napětím a přetvořením až do dosažení meze pevnosti. Například u válcové tlakové nádoby z keramiky s tlustým dnem tak může lom vyjít z přechodu mezi dnem a válcovou částí, kde působí nejvyšší tahové napětí, a dno se odlomí lomem podél obvodu. Tvar napojení dna na plášť se proto řeší tak, aby zde vznikla co nejmenší koncentrace napětí (například půlkulové dno na obr. 3.12 nebo vhodný přechod tvaru při použití tuhého dna, obr. 3.15). Jiným případem, který je nebezpečný i pro kovové nádoby, je střídavé zatěžování, kdy může dojít k únavě materiálu a k lomu po určité době provozu. Mez únavy je o hodně nižší než mez kluzu, a únavové trhlinky se začnou tvořit (opět v místech s nejvyššími napětími) i při poměrně nízkých napětích, kdy ještě platí Hookeův zákon.

Literatura ke kapitole 3.

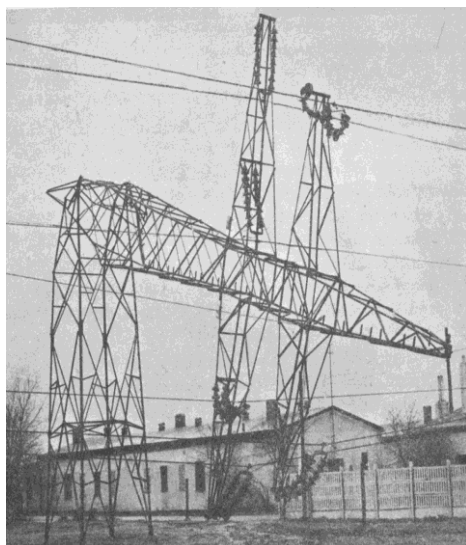
1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
2. Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL, Praha, 1989. 600 s.
3. Timošenko, S. P., Vojnovskij – Kriger, C.: Plastinky i oboločki. Nauka, Moskva, 1966. 636 s. (S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York, 1959.
4. Kolář, V., Sobotka, Z., Beneš, J.: Nosné stěny a desky. SNTL, Praha, 1961. 576 s.
5. Kolektiv, Pružnost a pevnost II. ČVUT, Praha, 1985. 214 s.
6. Novák, O. a kolektiv: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství. Tech. průvodce sv. 3. SNTL, Praha, 1963. 536 s.
7. Menčík, J.: Aplikovaná mechanika materiálů. Univerzita Pardubice, 2019. 196 s. Volně dostupná na: <https://dk.upce.cz/handle/10195/72947> nebo přes <https://eshop.upce.cz>

8. Čalkovský, A.: Únosnost tenkostěnných konstrukcí. Stavba strojů 94. DT ČSVTS, Praha, 1984. 130 s.
9. Park, Jongmin et al.: Numerical Prediction of Equivalent Mechanical Properties of Corrugated Paperboards by 3D Finite Element Analysis. Foods 2020, 9. (in print).
10. Menčík, J.: Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1996. 360 s.
11. Kolektiv: Pružnost a pevnost I. ČVUT, Praha, 1965. 272 s.
12. Gordon, J. E.: Structures (or Why Things Don't Fall Down). Penguin Books. New York, 1978. 396 s.
13. Placák, V., Kunc, J.: Výpočet napjatosti skořepin. SNTL, Praha, 1966.
14. Timošenko, S. P.: Soprotivlenije materialov II. Nauka, Moskva, 1965. 480 s. Překlad: Strength of materials. Part II. Advanced theory and problems. D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1956.
15. Gorbatov, N., Valenta, J.: Statika skořepin a skořepinových konstrukcí. SNTL, Praha, 1972. 572 s.
16. Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer-Verlag, Berlin, 1962. 312 s.
17. Vlasov, V. Z.: Obščaja teorija oboloček i jejo priloženija v technike. GITTL, Moskva, 1949. 784 s.
18. Volmir, A. C.: Gibkije plastinki i oboločki. GOSIZDAT techniko-teoretičeskoj literatury. Moskva, 1957.
19. Kolář, J., Němec, I., Kanický, V.: FEM – principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 2001. 401 s.

4. Ztráta stability štíhlých a tenkostěnných částí

U tenkostěnných konstrukcí někdy dochází ke zhroucení v důsledku vybočení nebo lokálního vyboulení stlačovaného prvku nebo součásti. Na obrázku 4.1 je stožár vedení vysokého napětí, který se zlomil, když tlaková síla v jednom prutu překročila kritickou hodnotu, takže vybočil. V této kapitole probereme různé případy ztráty stability tvaru. Začneme s příkými pruty a přejdeme k případům složitějším. Ukážeme, jak může vysoký úzký nosník zatížený příčnou silou vybočit se současným kroucením, všimneme si, co se děje při boulení desek, prstenců a skořepin, a objasníme jejich chování v pokritickém stavu.

Pro snadnější pochopení zde budeme uvádět jednoduché vztahy pro výpočet kritického zatížení v různých případech. Musíme si ale být vědomi, že v důsledku různých imperfekcí, zejména nepřesností týkajících se tvaru a místa působení zatížení a jeho přenosu na součást, může k vybočování docházet již při zatížení o dost nižším, než je kritické. To platí obecně pro ztrátu stability tenkostěnných konstrukcí. Spolehlivější je proto vyšetřování jejich únosnosti metodou konečných prvků, o kterém stručně pojednáme v závěru kapitoly.



Obr. 4.1. Havárie stožáru vysokého napětí přetížením [1].

4.1. Štíhlé pruty zatížené osovou tlakovou silou

Nejjednodušším případem je přímý prut, jehož oba konce jsou kloubově uloženy, takže se mohou pootáčet. Při určité hodnotě osové tlakové síly F se tento prut prohne (obr. 4.2 vlevo, $n = 1$). Diferenciální rovnice průhybové čáry tohoto prutu má pro malé průhyby w tvar [2]:

$$w'' = -\frac{M(x)}{EJ} = -\frac{F}{EJ} w, \quad \text{resp.} \quad w'' + \alpha^2 w = 0. \quad (4.1)$$

E je modul pružnosti materiálu prutu, J je moment setrvačnosti průřezu v ohybu ve směru prohnutí, a $\alpha^2 = F/(EJ)$ je konstanta. Pro ohybový moment $M(x)$ platí

$$M(x) = F w(x). \quad (4.2)$$

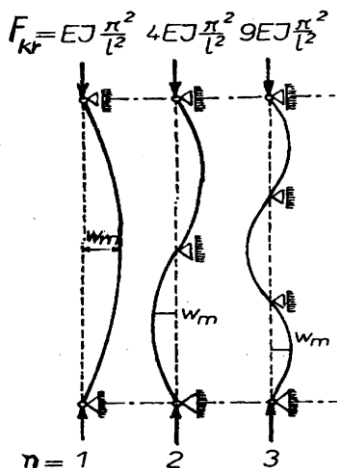
Řešení má obecný tvar

$$w(x) = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x), \quad (4.3)$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty. Lze ukázat, že prohnutý tvar se udrží pouze tehdy, dosáhne-li zatížení tzv. kritické hodnoty

$$F_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}; \quad \text{resp.} \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}; \quad (4.4)$$

l je délka prutu a n je počet půlvln průhybové čáry (obr. 4.2). Nejnižší **kritické zatížení** je pro $n = 1$; viz pravou část výrazu (4.4). Další kritické zatížení je pro $n = 2$; protože $n^2 = 4$, je tedy čtyřikrát vyšší. Pokud dojde k vybočení prutu při $n = 1$ a zatížení dále roste, došlo by ke zničení prutu (zlomení apod.) mnohem dříve než n



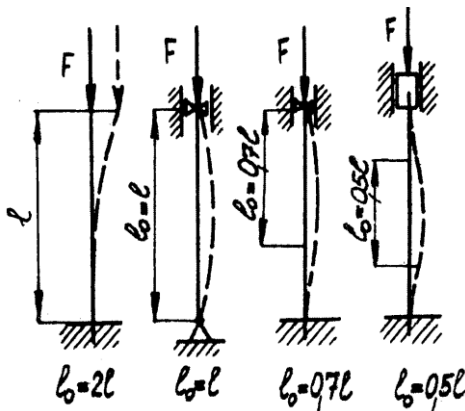
Obr. 4.2. Různé vlastní tvary vybočení kloubově uloženého tlačeného prutu [3].

dosáhne hodnoty 2 [viz dále vztah (4.6) pro výpočet napětí ve vybouleném stavu]. Proto se obvykle jako kritická síla F_{kr} udává výraz pro $n = 1$, který je uveden v pravé části vzorce (4.4). Ale pozor, i vyšší hodnoty n se mohou vyskytnout, pokud se nějakým způsobem zabrání pronutí prutu uprostřed (obr. 4.2). Příkladem jsou tlačené pruty u příhradových konstrukcí; například celková délka příhradového stožáru na obr. 4.1 je velká, ale vzdálenosti mezi jednotlivými příčnými pruty, které by v tomto případě byly pro vybočování rozhodující, jsou mnohem menší. (V případě na obr. 4.1 ale zřejmě byla příslušná vzdálenost stále ještě příliš velká).

Podobným způsobem lze odvodit velikost kritického zatížení i pro jiné způsoby uložení konců, a tedy i jiné tvary vybočení prutu. Obecně se rozlišují čtyři případy upevnění konců prutu (obr. 4.3). Pro všechny lze vyjádřit kritické zatížení ve tvaru

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E J}{l_0^2} ; \quad (4.5)$$

l_0 je tzv. vzpěrná délka, která závisí na způsobu uložení konců a odpovídá vzdálenosti inflexních bodů průhybové čáry. Její vztah k délce prutu je na obr. 4.3.



Obr. 4.3. Prohnutí prutu s různě uloženými konci při ztrátě stability.

Poznámka. Někdy může prut vybočit v různých směrech různým způsobem, v závislosti na podmínkách uložení jeho konců a na tvaru průřezu. Příkladem je ojnice spalovacího motoru: v jednom směru by její vybočení odpovídalo druhému případu zleva na obr. 4.3, a v kolmém směru případu zcela vpravo na obr. 4.3. Její průřez proto bývá obvykle různý v různých směrech, aby se příliš nelišily kritické síly pro oba způsoby vybočení; často se jedná o I-profil.

Je zajímavé, že získané řešení neumožňuje určit velikost prohnutí, ani velikost ohybových momentů a napětí. Dosažení kritického zatížení pouze znamená, že se může udržet jakýkoliv malý průhyb. Ale již malé vybočení prutu znamená obrovský nárůst napětí. Pro nejvyšší napětí v prutu kruhového průřezu, který je zatížen osovou tlakovou silou a má určité prohnutí, platí přibližně:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{tl} (1 + 8\delta/D), \quad (4.6)$$

kde σ_{tl} je tlakové napětí v prutu před vybočením, D je průměr prutu a δ je jeho počáteční průhyb uprostřed; viz též obr. 4.5. Při prohnutí rovném jedno procento průměru bude maximální napětí o 8% vyšší, při vybočení o $0,1D$ bude vyšší o 80%, a s rostoucím počátečním průhybem rychle dále narůstá. Již při malém vybočení tedy může dojít ke vzniku plastických deformací v případě tvárného materiálu, anebo ke zlomení prutu křehkého.

Možnost selhání prutu zatíženého osovou tlakovou silou lze také posuzovat prostřednictvím napětí. Protože při dosažení kritického zatížení je osa prutu ještě přímá, lze pro tento okamžik stanovit odpovídající **kritické napětí** stejným způsobem jako v tyči zatížené tlakovou silou:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{S} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2 S}. \quad (4.7)$$

Pro další úvahy je vhodné definovat tzv. poloměr setrvačnosti průřezu:

$$i = \sqrt{J/S} \quad (4.8)$$

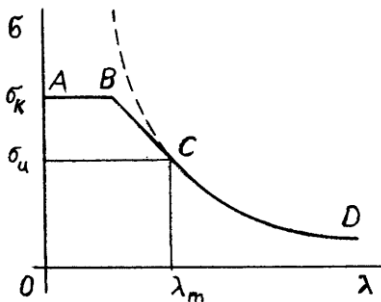
a štíhlostní poměr prutu:

$$\lambda = l_0/i. \quad (4.9)$$

Poloměr setrvačnosti i je taková pomyslná vzdálenost od neutrální osy, že kdybychom do ní jako do jednoho bodu umístili plochu průřezu S , dostaneme celkový moment setrvačnosti J (vyplývá to ze Steinerovy věty). Štíhlostní poměr je bezrozměrová veličina, která je větší pro delší a tenčí pruty, a charakterizuje tak štíhlost prutu. S použitím obou veličin můžeme kritické napětí (4.7) vyjádřit jako

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (4.10)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že kritické napětí závisí pouze na modulu pružnosti a štíhlostním poměru. Situace je ale složitější. Se zmenšující se štíhlostí kritické napětí narůstá, a pro relativně tlusté pruty dojde ještě před vybočením ke vzniku plastických deformací, popřípadě k rozdrčení prutu křehkého. Proto skutečná mezní křivka, oddělující na obr. 4.4 bezpečnou oblast od poruchové, má složitější tvar (ABCD). Byla navržena řada přibližných vztahů pro výpočet kritického napětí prutů s malou štíhlostí; viz např. [4, 5].

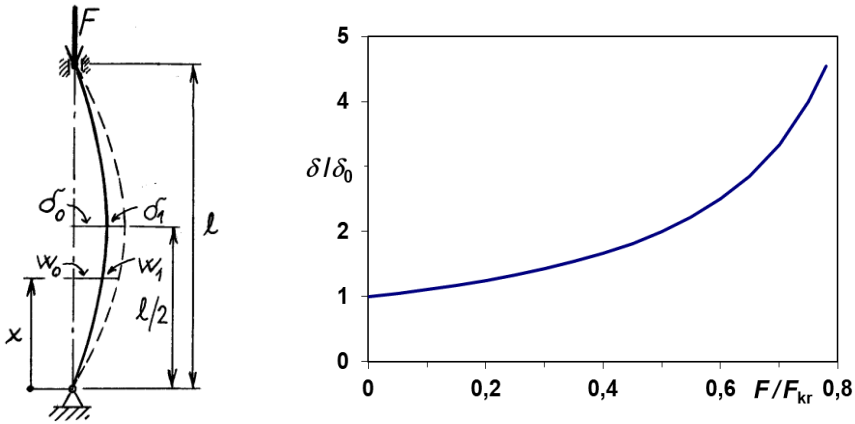


Obr. 4.4. Závislost mezního napětí σ na štíhlostním poměru λ . Pro $\lambda > \lambda_m$ je chování elastické, pro $\sigma > \sigma_u$ se projevují nelinearity v pracovním diagramu. Překročí-li napětí mez kluzu σ_k , nastane porušení plastickým tečením.

Objevil se ale další problém. U skutečných tyčí nebo prutů dochází k vybočování již při mnohem nižším zatížení než F_{kr} . Dokud bylo o této problematice známo jen málo, nebezpečí ztráty stability se při návrhu snižovalo volbou značně vysokého součinitele bezpečnosti vůči vybočení při vzpěru, $s_{vz} = F_{kr}/F_{jm}$, a díl se dimenzoval tak, jako kdyby na něj působilo zatížení s_{vz} -krát vyšší než jmenovité F_{jm} . Příčinou nižší únosnosti jsou takzvané **imperfekce** neboli nedokonalosti. Teorie uvedená výše totiž předpokládala, že prut je dokonale přímý a homogenní a zatížení působí přesně v jeho ose. Odchylny od ideálního stavu ale velmi výrazně ovlivňují chování při zatížení. Zde ukážeme řešení pro případ, kdy prut s kloubově upevněnými konci má již z výroby počáteční prohnutí o maximální velikosti uprostřed δ_0 (obr. 4.5 vlevo). Budeme předpokládat, že má tvar půlvlny sinusové křivky

$$w_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} . \quad (4.11)$$

Tuto funkci jsme zvolili proto, že i dokonale přímý prut se při vybočení deformoval do podobného tvaru; viz levou část výrazu (4.3). Při zatížení osovou tlakovou silou F se průhyb zvětší o $w_1(x)$. Toto přídavné prohnutí má podobný



Obr. 4.5. Prut s počátečním průhybem δ_0 a růst celkového průhybu $\delta = \delta_0 + \delta_1$ s růstem zatížení F . F_{kr} – kritické zatížení.

průběh,

$$w_1 = \delta_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4.12)$$

takže výsledný průhyb bude

$$w = w_0 + w_1 = (\delta_0 + \delta_1) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4.13)$$

V řezu x působí ohybový moment (obr. 4.5):

$$M(x) = F w(x) = F (\delta_0 + \delta_1) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4.14)$$

Tento moment vyvodí zmíněný přídavný průhyb w_1 , a platí

$$\frac{M}{EJ} = -w_1'' = \frac{\pi^2}{l^2} \delta_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4.15)$$

Porovnáním vztahů (4.14) a (4.15) a vydělením výrazem $\sin(\pi x/l)$ dostaneme rovnici

$$\frac{F}{EJ} (\delta_0 + \delta_1) = \frac{\pi^2}{l^2} \delta_1. \quad (4.16)$$

Přihlédneme-li, že $\pi^2 EJ/l^2 = F_{kr}$, viz upravenou pravou část výrazu (4.4), a vyjádříme přírůstek průhybu δ_1 prostřednictvím celkového průhybu δ a imperfekce δ_0 jako $\delta_1 = \delta - \delta_0$, dostaneme po řadě úprav následující vztah pro celkový průhyb:

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{1 - F/F_{kr}}, \quad (4.17)$$

Tato závislost, znázorněná na obr. 4.5 vpravo, je v bezrozměrovém tvaru a platí pro jakýkoliv prut s kloubovým uložením konců. Při známé hodnotě zatěžující síly F a kritického zatížení F_{kr} , spočítaného podle vztahu (4.5) pro danou délku l , moment setrvačnosti J a materiál prutu (E), můžeme tedy pro předpokládanou velikost imperfekce δ_0 vypočítat maximální průhyb δ , a podle rovnice

$$M_{\max} = F \delta \quad (4.18)$$

stanovit ohybový moment a napětí. Případně můžeme naopak stanovit potřebnou hodnotu momentu setrvačnosti J pro bezpečný přenos zatížení F , kdy maximální napětí nepřekročí dovolenou hodnotu.

Všimněme si zajímavých rozdílů mezi oběma přístupy. Řešení pro dokonalý prut dalo kritické zatížení, avšak neumožnilo stanovit ani prohnutí, ani napětí při jeho dosažení. Navíc, ke zhroucení reálného prutu s imperfekcemi by došlo mnohem dříve než podle vztahu (4.5). Zdálo by se tedy, že znalost kritické síly F_{kr} je k ničemu. Ale v řešení prutu s imperfekcí, vztah (4.17), se kritická síla opět objevila. Má tedy ve skutečnosti svůj význam. Navíc vzorec (4.17) ukazuje, že prut s počátečním zakřivením se bude prohýbat již od samého počátku zatěžování. Při známé (nebo předpokládané) velikosti imperfekce tedy můžeme jednoznačně vypočítat velikost celkového průhybu i velikost napětí pro jakékoliv zatížení; samozřejmě za předpokladu, že celkové prohnutí je velmi malé. To je rozdíl proti ideálnímu případu, kdy prut zůstává stále přímý až do zatížení F_{kr} , a pak při sebemenším popudu by se mohl udržet jeho jakýkoliv (malý) průhyb, popřípadě by došlo ke zhroucení prutu.

Jiným druhem imperfekce je **excentrické zatížení**, kdy tlaková síla nepůsobí přesně v ose. V tomto případě může nezatížený prut být i přímý, ale již od nejnižšího zatížení se bude plynule prohýbat, a s tím, jak se zatížení blíží kritické hodnotě, se bude průhyb blížit (teoreticky) k nekonečnu. Dalšími imperfekcemi jsou nehomogenity prutu nebo zbytková napětí.

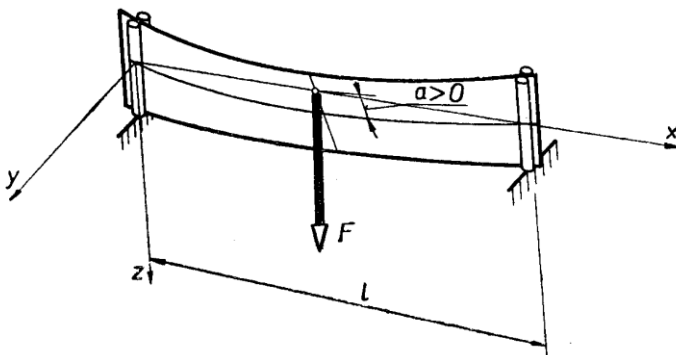
K podrobnějšímu studiu ztráty stability prutů (ale i desek a skořepin) lze doporučit např. [3, 6 – 12, 28 – 35].

Dosud jsme uvažovali, že ke ztrátě stability dojde prohnutím celého prutu. U tenkostěnných součástí, jako jsou trubky nebo válcované či ohýbané profily, ale může dojít k tomu, že stěna se vyboulí nebo zvlí jenom v určitém místě – hovoříme o lokální ztrátě stability. U nosníku ve tvaru tenkého pásu, zatíženého příčnou silou ve směru delší strany průřezu, zase může dojít ke ztrátě únosnosti spojené i s jeho zkroucením. Porucha může nastat i jinými způsoby. Těmto otázkám se budeme věnovat dále.

4.2. Stabilita úzkých nosníků s příčným zatížením

Je-li štíhlý nosník s podepřenými konci zatížen uprostřed rozpětí příčnou silou F , a moment setrvačnosti jeho průřezu je v různých směrech stejný nebo se liší jen málo, prohne se ve směru působící síly. Co se ale stane, jestliže jeho průřez má tvar úzkého obdélníku o tloušťce mnohem menší než výšce, $t \ll h$, a je zatížen silou působící v těžišti ve směru většího rozměru h (obr. 4.6)? Zpočátku se velmi mírně prohýbá v tomto směru, ale při dosažení kritické velikosti síly F_{kr} náhle vybočí ve směru menší tloušťky t při současném pootočení. Vybočení začíná na hořejší straně průřezu, kde působí tlakové napětí (obr. 4.6). Dochází při něm i ke zkroucení nosníku, takže na kritické zatížení má vliv jak jeho tuhost v ohybu, tak i tuhost v kroucení. Lze odvodit [6, 8, 13], že kritická síla je

$$F_{kr} = \frac{16,93\sqrt{BC}}{l^2} \approx \frac{1,75Eht^3}{l^2} ; \quad (4.19)$$



Obr. 4.6. Vybočení úzkého nosníku zatíženého příčnou silou uprostřed [13].

l je délka prutu, $B = EJ_2$ je tuhost průřezu v ohybu ve směru vybočení, a C je tuhost průřezu v kroucení. E je modul pružnosti v tahu a J_2 je moment setrvačnosti průřezu v ohybu ve směru b ; platí $J_2 = ht^3/12$. Tuhost průřezu v kroucení je dána přibližným vztahem [6, 8, 13]

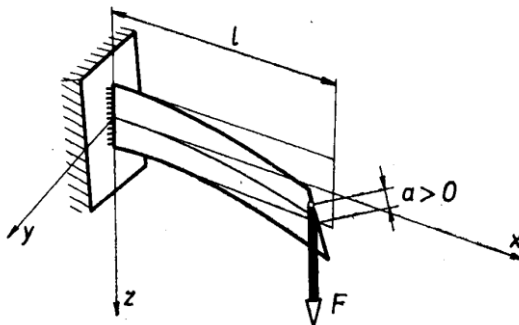
$$C = G \frac{ht^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{t}{h} \right), \quad (4.20)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku. Přibližný výraz úplně vpravo ve vztahu (4.19) vychází z toho, že $\sqrt{BC} = Eht^3/\sqrt{[72(1+\mu)]}$, a odpovídá Poissonovu číslu $\mu = 0,3$. Působí-li síla F ve vzdálenosti a nad osou nosníku, jak je naznačeno na obrázku, je podle [8] nutno vynásobit vzorec (4.19) součinitelem

$$k = 1 - 3,48 \frac{a}{h} \sqrt{\frac{B}{C}}. \quad (4.21)$$

Kritické zatížení tedy bude o něco nižší. Souvisí to s tím, že při pootočení průřezu se poloha působíště síly sníží více, než poloha odpovídajícího bodu v těžišti průřezu. Tím se uvolní víc její potenciální energie, což přispívá k vybočení. Je to zřejmé z obr. 4.6. Působíště síly F pod těžištěm průřezu ($a < 0$) bude naopak vybočení bránit; ve vztahu (4.21) je nutno mínus nahradit znaménkem plus. Poloha působíště síly v zatíženém průřezu tedy může stabilitu ovlivnit nepříznivě nebo příznivě.

Úzký nosník, jehož jeden konec je vetknutý a druhý zatížený silou působící v těžišti průřezu (obr. 4.7), vybočí a ohne se při zatížení



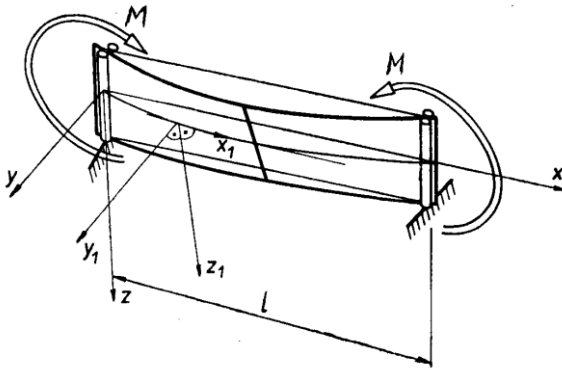
Obr. 4.7. Vybočení úzkého nosníku zatíženého příčnou silou na konci [13].

$$F_{kr} = \frac{4,01\sqrt{BC}}{l^2}, \quad (4.22)$$

Bude-li vysoký úzký nosník zatížen momentem M podle obr. 4.8, zůstává zpočátku přímý, ale při dosažení tzv. kritického zatížení vybočí tak, jak je naznačeno na obrázku. Vybočení začíná opět na straně, kde působí tlakové napětí, a dochází při něm i ke zkrucování prutu. Kritická velikost momentu M_{kr} pro nosník s konci uloženými podle obr. 4.8 je

$$M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{BC}, \quad (4.23)$$

kde tuhosti B a C mají stejný význam jako předešle [8, 13].

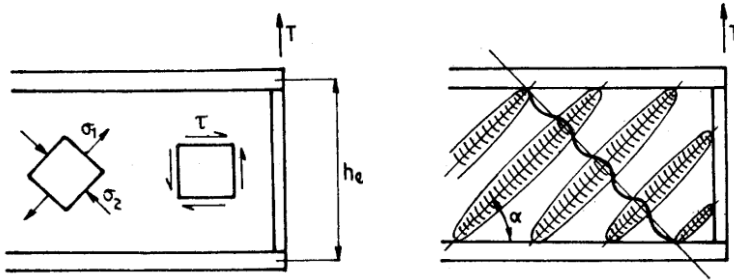


Obr. 4.8. Vybočení úzkého nosníku zatíženého ohybovým momentem [13].

Podobným způsobem mohou vybočit také ohnuté okraje tenkostěnných U-profilů namáhaných ohybem, zejména působí-li v pásnicích tlakové napětí.

4.3 Ztráta stability účinkem smykových napětí

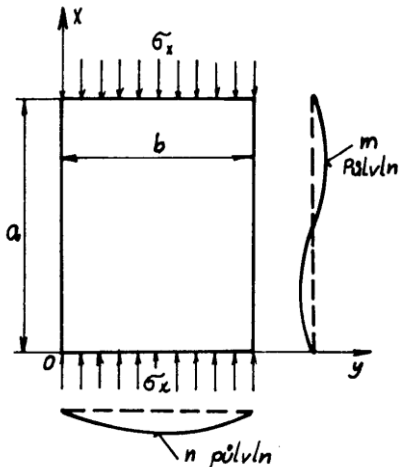
Působí-li v určitém místě smykové napětí, je situace podobná, jako kdyby zde v jednom řezu pootočeném o 45° působilo tahové napětí, a v řezu k němu kolmému bylo napětí tlakové. Jestliže toto tlakové napětí v poměrně tenké stěně dosáhne kritické hodnoty, dojde zde k jejímu lokálnímu vyboulení (obr. 4.9). Podobně může dojít ke ztrátě stability při zkrucování tenkostěnné trubice. Snadno se o tom přesvědčíme u pryžové hadice na zalévání.



Obr. 4.9. Lokální ztráta stability při zatížení smykem [6].

4.4 Ztráta stability desek

Nyní si všimneme boulení deskových panelů zatížených tlakovou silou působící v jejich rovině. Na obr. 4.10 je znázorněna deska o rozměrech $a > b$ a tloušťce t s kloubově uloženým horním a dolním okrajem, zatížená po celé šířce b rovnoměrně rozloženým tlakovým napětím σ_x . Boční okraje jsou volné. Dokud je napětí σ_x relativně nízké, zůstává deska rovná, a napětí je rozložené rovnoměrně



Obr. 4.10. Zborcení desky zatížené tlakovou silou v tečné rovině (zde $m = 2$).

napříč tloušťkou t . Při dosažení jeho kritické velikosti deska vybočí ze své roviny. Kritické napětí je [6, 8, 14]

$$\sigma_{kr} = c E^* \left(\frac{t}{a} \right)^2, \quad (4.24)$$

tedy podobné jako u prutu s kloubově uloženými konci, kde délka l odpovídá rozměru desky a ve směru působící síly. U široké desky se zohlednilo zabránění příčné kontrakci prostřednictvím korigovaného modulu pružnosti

$$E^* = E / (1 - \mu^2). \quad (4.25)$$

Ve vzorci (4.24) se předpokládá jedna půlvlna sinusovky; obr. 4.10 odpovídá dvěma půlvlnám. Při více půlvlnách by kritické zatížení bylo ještě vyšší, podobně jako ukazuje vztah (4.4) u prutů. Konstanta c zohledňuje, jestli se zatížené konce desky mohou pootáčet ($c = 1$), nebo jestli je lze považovat za vetknuté ($c = 4$).

Jsou-li opřeny i boční strany, takže se nemohou volně prohýbat, je situace složitější. Při kritickém zatížení stěna vybočí ze své roviny, a může se prohnout v obou směrech. Kritické napětí se obvykle zapisuje ve tvaru

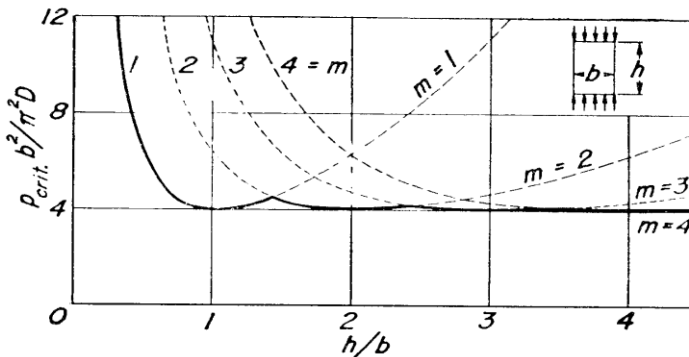
$$\sigma_{kr} = k E \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad (4.26)$$

kde

$$k = \frac{\pi^2}{12(1 - \mu^2)} \left[\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right]^2 \quad (4.27)$$

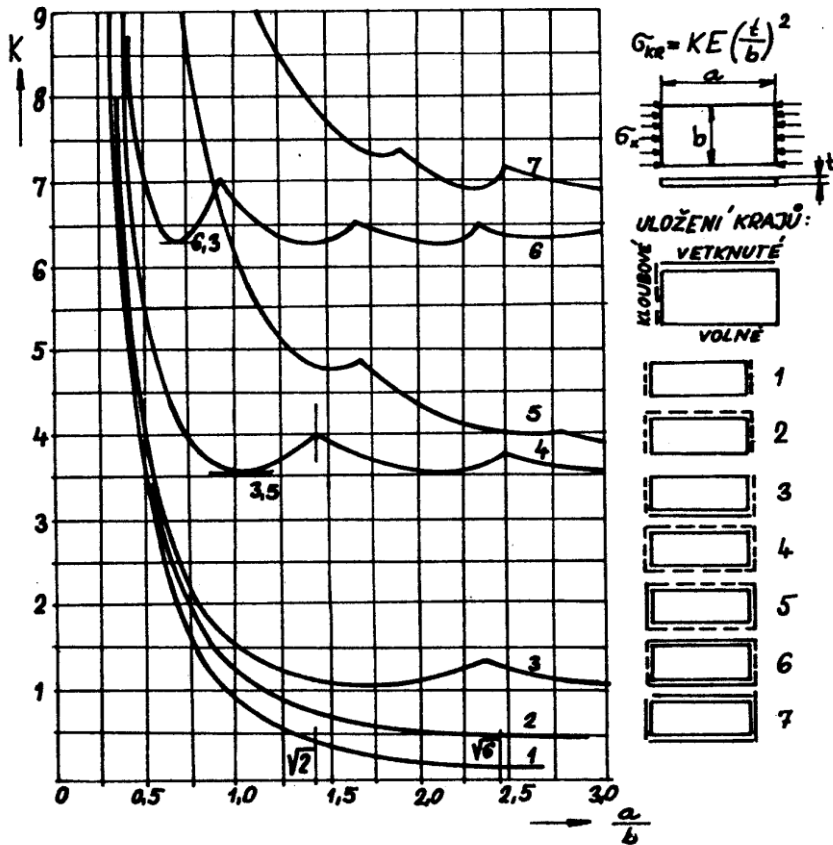
je bezrozměrový součinitel, závislý na Poissonově čísle μ , poměru délek stran a/b a počtu podélných půvln m (obr. 6.1). Roli hraje i způsob upevnění okrajů desky.

Obrázek 4.11 podle [7] udává v bezrozměrném tvaru kritický tlak pro vybočení desky s jednoduchým upevněním okrajů v závislosti na poměru délky h a šířky b a pro různé počty půvln m .



Obr. 4.11. Kritické zatížení pro ztrátu stability tlačené desky [7].

Vztah (4.25) pro kritické napětí je velmi jednoduchý, a proto se používá i pro další případy. Obr. 4.12 ukazuje konstantu k v závislosti na způsobu upevnění okrajů. Čísla u křivek odpovídají způsobům upevnění znázorněným vpravo, „vlny“ u jednotlivých křivek odpovídají různým počtům púlvlů v zborceněm tvaru.

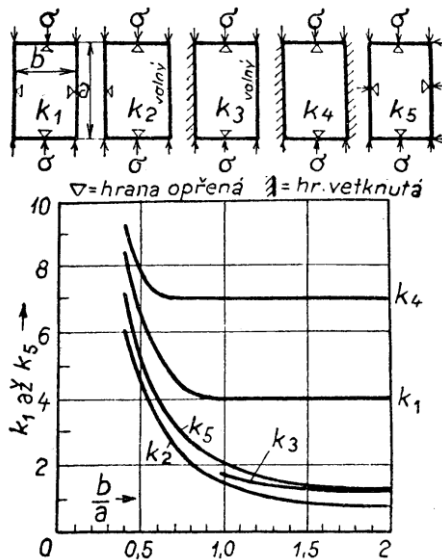


Obr. 4.12. Součinitel k pro výpočet kritického napětí tlačené desky [8].

Podle Krutiny [15] vybočí obdélníková deska při napětí

$$\sigma_{vz} = \frac{k\pi^2 N}{a^2 t} ; \quad (4.28)$$

součinitele k jsou na obr. 4.13. (Jedná se vlastně o zjednodušený diagram z obr. 4.12.)



Obr. 4.13. Součinitele k ve vztahu (4.27) pro ztrátu stability obdélníkové tlacené desky [15].

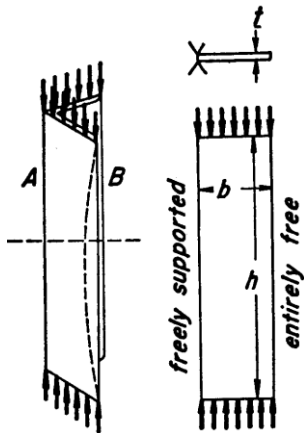
Kruhová deska o poloměru a , stlačovaná ve své rovině ze všech stran, se vybojí při radiálním napětí daném vztahem (4.24), do kterého za c dosadíme $c = 14,68$.

Stabilita L-profilu zatíženého osovou tlakovou silou

Mnohem vyšší odolnost vůči vybočení při zatížení osovou tlakovou silou (ve srovnání s tenkým pásem obdélníkového průřezu) má profil tvaru L. Situace je znázorněna na obr. 4.14. Při dosažení kritického zatížení se obě ramena mohou vybočit podél svého volného okraje (např. B), zatímco rohová hrana A je „podepřena“, a k jejímu vybočení nedejde. Každé rameno připomíná obdélníkovou desku volně podepřenou na třech stranách a s jednou stranou volnou. Tuto úlohu řešil Timošenko [7, 12], který odvodil kritické napětí:

$$\sigma_{krit} = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left(0,46 + \frac{b^2}{h^2} \right), \quad (4.29)$$

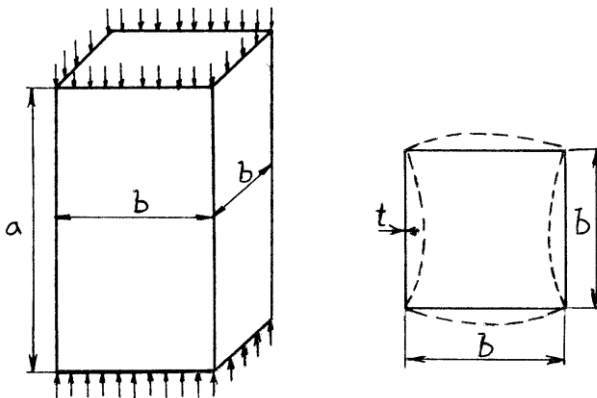
kde D je ohybová tuhost desky, definovaná vztahem (3.4), b je šířka ramene, a t je jeho tloušťka.



Obr. 4.14. Vyboulení ramen L-profilu zatíženého tlakovou silou [7].

Tenkostěnné potrubí obdélníkového průřezu, zatížené osovou silou

Případ je znázorněn na obr. 4.15. Podobné konstrukce se vyskytují například v dopravních prostředcích nebo ve vzduchotechnických zařízeních. V podstatě se jedná o čtyři tenké desky, spojené v rozích a zatížené v podélném směru. Na obrázku 4.15 vpravo je naznačen tvar vybočení, jestliže zatížení dosáhne kritické hodnoty. Rohy jsou tužší, takže zůstávají přímé. V nich je také zachován úhel, který svírají dvě sousední stěny, a příčný řez ve vybočené části vypadá tak, jak je naznačeno na obrázku.



Obr. 4.15. Zborcené potrubí čtvercového průřezu.

Jednoduché posouzení možnosti ztráty stability ukážeme na následujícím příkladu podle [8].

Příklad.

Vzduchotechnické potrubí čtvercového průřezu $b \times b$ a délky a z ocelového plechu o tloušťce t podle obr. 4.15 je zatíženo osovou silou F . Zkontrolujte bezpečnost vůči ztrátě stability pro následující parametry:

$a = 500$ mm, $b = 200$ mm, $t = 1,2$ mm, $F = 4000$ N, $E = 210000$ MPa, $\sigma_k = 500$ MPa.

Řešení. Delší strany a i kratší strany b budeme považovat za kloubově uložené, a budeme předpokládat, že při dosažení kritického zatížení se prohnu podle obr. 4.15. Tlakové napětí ve stěně bude

$$\sigma = \frac{F}{4bt} = \frac{4000}{4 \times 200 \times 1,2} = 4,167 \text{ MPa}.$$

Kritické napětí nalezneme podle vztahu

$$\sigma_{kr} = K_{(4)} E \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad (4.30)$$

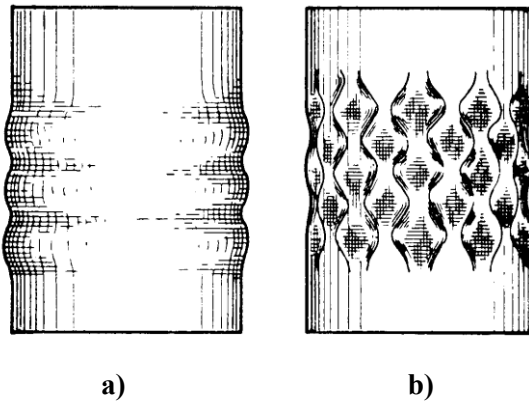
kde $K_{(4)}$ je konstanta, kterou lze najít v grafu 4.11 pro daný způsob upevnění okrajů a poměr a/b . V našem případě (kloubové uložení po všech čtyřech stranách, s odpovídající křivkou č. 4, a poměr a/b , resp. $h/b = 2,5$), dostaneme po dosazení všech hodnot do (4.30) kritické napětí $\sigma_{kr} = 28,35$ MPa. To je mnohem méně než mez kluzu oceli σ_k . Případné vybočení by tedy bylo pružné, a odpovídající bezpečnost vůči němu je

$$k_{st} = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma} = \frac{23,85}{4,17} = 6,8.$$

4.5 Stabilita válcových skořepin

Nejprve si všimneme ztráty stability válcové tenkostěnné skořepiny zatížené v osovém směru silou F , resp. osovým napětím σ_a rovnoměrně rozloženým podél obvodu; platí $F = \sigma_a \times 2\pi Rt$. Roli hraje délka, resp. štíhlost skořepiny. Velmi **dlouhá štíhlá trubka** může při dosažení kritického zatížení vybočit podobně jako prut (obr. 4.3), a lze použít vztah (4.5).

U krátké skořepiny může dojít k boulení podle obr. 4.16a (méně častý případ) nebo 4.16b (častější případ; viz též fotografii na obálce této knihy). Někdy také dojde



Obr. 4.16. Zborcení válcové skořepiny zatížené osovou tlakovou silou [16].

k lokálnímu vyboulení nebo prolomení u tenkostěnné trubky zatížené ohybovým momentem. Můžeme to například uvidět, ohýbáme-li pryžovou hadici na vodu.

Kritické osové napětí pro velmi krátký válec, jehož délka splňuje podmínku $l \leq 1,22\sqrt{(Rt)}$ při volně podepřených okrajích nebo $l \leq 2,5\sqrt{(Rt)}$ při vetknutých okrajích, lze počítat [8] podle vzorce pro širokou desku,

$$\sigma_{kr} = k \frac{Et^2}{l^2} ; \quad (4.31)$$

koeficient k je roven 0,9 pro volně podepřené a 3,6 pro vetknuté konce.

Kritické osové napětí a osovou sílu pro delší válec lze počítat [8] podle vztahu

$$\sigma_{kr} = k \frac{Et}{R}, \quad F_{kr} = 2\pi kt^2 . \quad (4.32)$$

Koeficient stability k lze počítat v souladu s výsledky experimentů takto:

$$k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1000t}{R} \right)^{3/8} . \quad (4.33)$$

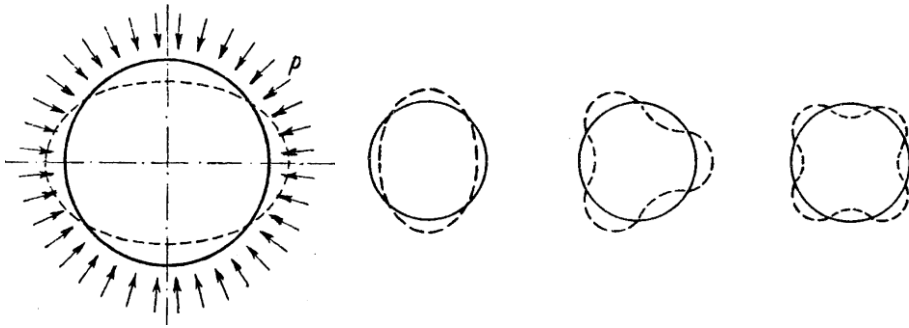
Dále uvedeme některé vztahy pro zborcení válcových skořepin radiálním tlakem (např. nádoby s vnějším přetlakem). Začneme ale nejprve s kruhovým prstencem; kromě jiného proto, že rotační tenkostěnné skořepiny často používají výztužné prstence kruhového tvaru.

Stabilita kruhového prstence zatíženého radiálním tlakem (obr. 4.17).

Nejnižší kritická hodnota radiální síly p (N/m) pro zborcení **kruhového prstence** je [7, 8]

$$p_{kr} = \frac{3EJ}{R^3}, \quad (4.34)$$

a odpovídá zdeformování podle obr. 4.17. Za určitých podmínek se může vytvořit po obvodu prstence větší počet vln; tomu pak odpovídá vyšší kritické zatížení.



Obr. 4.17. Vlevo: Zborcení trubky zatížené v radiálním směru tlakem p .
Vpravo: Různé tvary zborcení prstence zatíženého radiálním tlakem [7].

U některých konstrukcích se užívá vyztužení ve tvaru **části kruhového oblouku** podle obr. 4.18. Kritické radiální zatížení pro zborcení oblouku s kloubově upevněnými konci je [8]

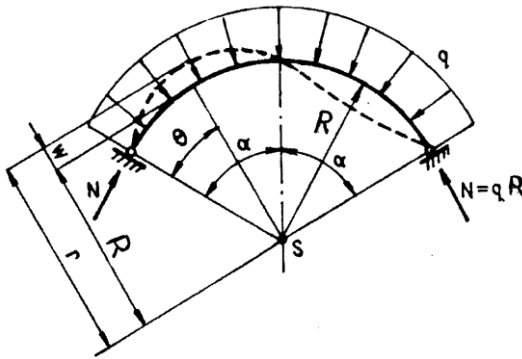
$$q_{kr} = \frac{EJ}{R^3} \left(\frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} - 1 \right); \quad (4.35)$$

α je úhel v radiánech a n je počet vln na obvodě prstence ($n = 1, 2, \dots$). Předpokladem pro použití vztahu (4.35) je, že geometrie nebo upevnění neumožní vybočení prstence z jeho roviny.

Pro rychlé posouzení se také používá výraz podle Dinika [8]:

$$q_{kr} = \frac{EJ}{R^3} K(\alpha), \quad (4.36)$$

kde $K(\alpha)$ je tzv. koeficient stability kruhového oblouku. V tabulce 1 jsou uvedeny



Obr. 4.18. Ztráta stability kruhového oblouku zatíženého tlakem q v radiálním směru [7].

hodnoty $K(\alpha)$ pro různé úhly α , a to pro konce oblouku volně otočné nebo vetknuté.

Tabulka 1. Koeficienty stability $K(\alpha)$ ve vztahu (4.35) podle Dinika [8].

2α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
	143	35	15	8	4,7	3
	294	73,3	32,4	18,1	11,5	8

Stabilita dlouhé trubky zatížené vnějším přetlakem

Pro dlouhou tenkostěnnou trubku vystavenou vnějšímu přetlaku po celém povrchu bude kritický radiální tlak p_{kr} (Pa) o něco vyšší než by byl kritický tlak na kruhový prstenec, protože se vrstvy v její stěně nemohou v podélném směru volně deformovat – podobně jako při ohybu desek. To lze zohlednit tak, že ve vztahu (4.34) zavedeme modul pružnosti pro dvouosou napjatost, $E^* = E / (1 - \mu^2)$. Přihlédneme-li dále k tomu, že kvadratický moment průřezu prstence $J = bt^3/12$ bude u dlouhé trubky o délce l roven $lt^3/12$, a nahradíme-li radiální liniové zatížení q tlakem $p = q/l$, dostaneme po úpravě tzv. Bryanovu-Bressovu formuli [8] pro kritický tlak:

$$p_{kr,\infty} = \frac{E^*}{4} \left(\frac{t}{R} \right)^3 = 2E^* \left(\frac{t}{d} \right)^3, \quad (4.37)$$

kde d je průměr trubky. Rovnice (4.37) platí pro dlouhou trubku s volnými konci, pokud je její průřez dokonale kruhový. Při dosažení kritického tlaku se kruhový průřez změní na eliptický. Zpravidla ale trubky vykazují již z výroby určité zploštění, takže ke ztrátě stability dochází při tlaku o něco nižším. Má-li průřez před zatížením přibližně tvar elipsy s minimální a maximální délkou os d_{\min} a d_{\max} , lze určit korigovanou hodnotu kritického tlaku podle [16]

$$p_{kr,\infty} = 2E^* \left(\frac{t}{d_{\max}} \right)^3 \left(\frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right)^3. \quad (4.38)$$

Stabilita trubky konečné délky zatížené vnějším přetlakem

Jednoduchou korekci formule (4.37) na vliv délky l u trubky s volnými konci navrhl Mayer [8]

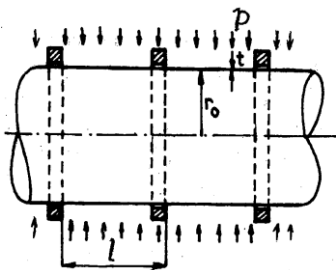
$$p_{kr} = E^* \left\{ 2 \left(\frac{t}{d} \right)^3 + \frac{\pi^4}{72} \left(\frac{t}{l} \right)^3 \frac{d}{l} \right\}. \quad (4.39)$$

Tento vzorec lze použít i pro předběžný návrh tloušťky stěny t .

Pro dlouhou trubku vyztuženou řadou prstenců o roztečích l podle obr. 4.19 se podle [8] doporučuje vztah

$$p_{kr} = \frac{2E^* J^*}{r_0^3 l}, \quad (4.40)$$

kde $l = 2r_0$. V kvadratickém momentu J^* musí být zahrnut i kvadratický moment prstence, a je nutno přihlídnout, že se změní i poloha výsledné neutrální osy.



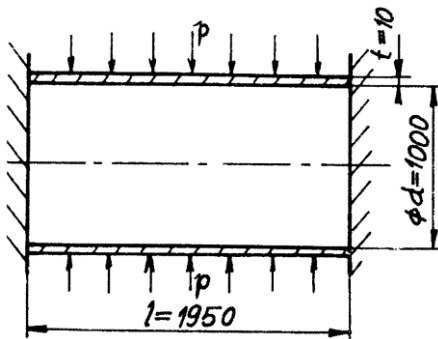
Obr. 4.19. Dlouhá válcová skořepina vyztužená žebry a zatížená vnějším přetlakem.

Pro určení kritického vnějšího přetlaku krátké nebo uzavřené válcové trubky bylo navrženo několik přibližných vztahů, viz např. [8]. V normě US Exp. Model Basin se doporučuje [8] vzorec

$$p_{kr} = \frac{2,6E \left(\frac{t}{d}\right)^2 \sqrt{\frac{t}{d}}}{\frac{l}{d} - 0,45 \sqrt{\frac{t}{d}}} \quad (4.41)$$

Jeho použití budeme ilustrovat v následujícím příkladu podle [8].

Příklad. Vypočítejte kritický vnější přetlak pro válcový tenkostěnný plášť kotle opatřeného dny, podle obr. 4.20, kde jsou uvedeny i rozměry. Předpokládaný modul pružnosti pláště je $E = 200000$ MPa.



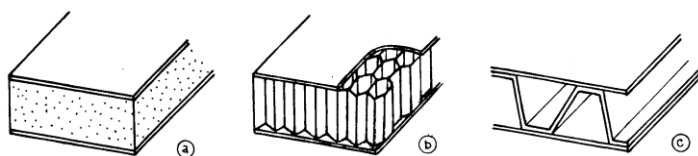
Obr. 4.20. Válcový plášť kotle vystavený vnějšímu přetlaku p [8].

Řešení. Použijeme vztah (4.41), kam v souladu s obrázkem dosadíme následující bezrozměrové veličiny: $d/h = 100$, $l/d = 1,95$, a $l/h = 195$.

$$p_{kr} = \frac{2,6 \times 2 \times 10^5 \times 10^{-4} \times 10^{-1}}{1,95 - 0,45 \times 10^{-1}} = 2,92 \text{ MPa.}$$

POZNÁMKA. Podobně jako u prutů zatížených osovou tlakovou silou dochází i u reálných skořepin ke ztrátě stability při zatížení i několikanásobně nižším, než je kritická síla F_{kr} nebo kritický tlak p_{kr} uváděný ve vzorcích (4.37) – (4.40). Příčinou jsou opět různé imperfekce, a při návrhu je s tím nutno počítat.

Pro snížení nebezpečí vyboulení nebo prolomení se tenkostěnné skořepiny vyztužují. Někdy se stěna vytvoří jako **sendvič** (obr. 4.21): krajní vrstvy jsou



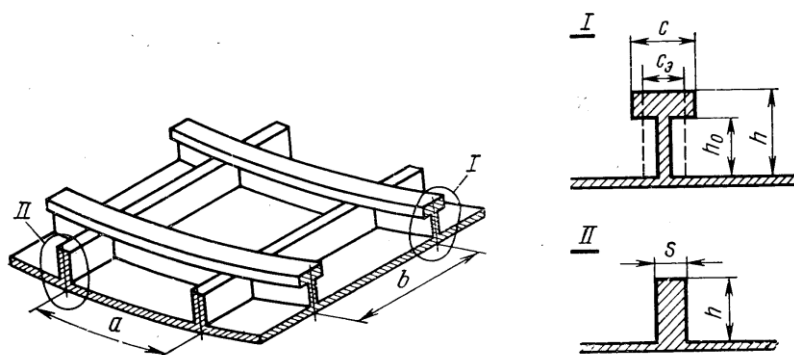
Obr. 4.21. Příklady provedení sendvičů.

z materiálu o vyšším modulu pružnosti a mezi kluzu, a mezi nimi je poddajnější a méně pevná prostřední vrstva například z pěnového materiálu nebo z voštin. Jejím hlavním úkolem je udržet krajní vrstvy navzájem ve správné vzdálenosti. Někdy se použije vlnitý materiál. V takových případech lze při výpočtech uvažovat ekvivalentní tloušťku. To je taková tloušťka homogenní stěny, která má stejnou ohybovou tuhost jako vyšetřovaná stěna vícevrstvá. Dalším způsobem vyztužování skořepin jsou žebra.

4.6 Použití vyztužných žeber

Odolnost desek nebo skořepin proti ztrátě stability (vyboulení) při tlakovém zatížení je možné zvýšit použitím vyztužných žeber. Ta mohou být jednoduchá (obr. 4.22, II) nebo s vyztuženým okrajem (obr. 4.22, I). Při vysokém tlakovém napětí by totiž žebro mohlo vybočit v některém místě do strany, a jeho vyztužení tomu brání, takže příslušné kritické zatížení bude vyšší. Pozitivní vliv vyztužných žeber spočívá zejména v tom, že výrazně zvyšují moment setrvačnosti soustavy „skořepina + žebro“.

Provedení a uspořádání vyztužných žeber si všimneme podrobněji v kapitole 6.



Obr. 4.22. Skořepina vyztužená dvěma typy žeber [16].

4.7 Kritický vnější tlak pro kulovou skořepinu

Je-li tenkostěnná kulová skořepina zatížena vnějším přetlakem, dojde u ní podle teoretického řešení [16, 12] ke zborcení při tlaku

$$p_{kr} = \frac{2Et^2}{R^2 \sqrt{3(1-\mu^2)}}, \quad (4.42)$$

kde E je modul pružnosti a μ Poissonovo číslo materiálu skořepiny, t je tloušťka stěny a R poloměr nádoby. V důsledku různých imperfekcí dojde ke zborcení při nižších tlacích.

Určitou imperfekcí je zploštění, kdy skořepina připomíná rotační elipsoid. Označíme-li delší a kratší poloosu jako a , b , platí podle [16] pro kritický vnější přetlak

$$p_{kr} = k \frac{Et^2}{a^2} \left(\frac{b}{a} \right)^2; \quad (4.43)$$

k je konstanta, závisící na Poissonově čísle. Pro $\mu = 0,3$ je $k = 1,21$. V ideálním případě je $a = b = R$ a vztah (4.43) přejde na (4.42).

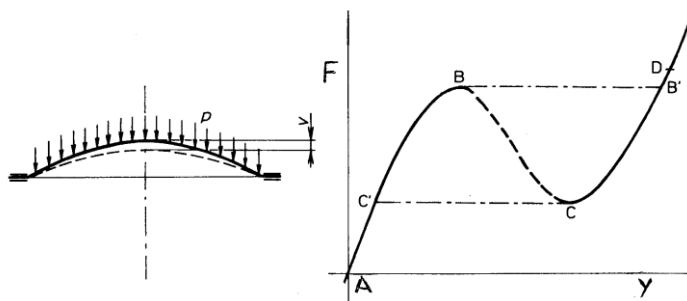
Poznámka. Poměr R/t u této, ale i u dalších skořepin se někdy označuje jako parametr tenkostěnnosti.

4.8 Pokritické chování prutů, desek a skořepin

Pokritickým chováním rozumíme odezvu součásti na zatížení, které překročilo kritickou hodnotu [9, 17, 18]. Existuje zásadní rozdíl mezi chováním štíhlého tlačeneho prutu a chováním stěny nebo skořepiny. Deformace prutu po vybočení roste velmi rychle i bez dalšího zvyšování zatížení; prut nemá téměř žádnou pokritickou rezervu únosnosti. U stěn je situace odlišná. Při dosažení kritického zatížení a průhybu stěny se v její rovině objevují membránová napětí, která jsou důsledkem rovinné deformace. Deformace stěny narůstá se zatížením, ale pomalu, takže rezerva únosnosti je velká. Stěnu proto můžeme navrhnout tak, aby pracovala v pokritickém stavu. Z hlediska hmotnosti tedy vyjde úsporněji, než kdyby byla omezena dosažením kritického napětí.

U skořepin při monotónním nárůstu zatížení rostou monotónně i pružné deformace.

Někdy ale při dosažení určitého zatížení dojde v konstrukci k „lupnutí“ a soustava zaujme skokem nový tvar. Jako příklad je na obr. 4.23 vlevo znázorněna skořepina tvaru plochého kulového vrchlíku, zatížená tlakem p . Na obr. 4.23 vpravo je odpovídající diagram „síla – deformace“; síla F je přímo úměrná tlaku p .



Obr. 4.23. Ztráta stability a pokritické chování kulového vrchlíku [9, 17].

Při růstu tlaku se zvětšuje průhyb y skořepiny podle křivky AB. Při dosažení bodu B dosáhlo zatížení kritické hodnoty, a při dalším zvýšení zatížení dojde k náhlé změně tvaru, čemuž v diagramu odpovídá přeskok z bodu B do B'. Skořepina se dostala do nové stabilní polohy a dalšímu monotónnímu nárůstu tlaku p odpovídá „stabilní“ průhyb y , znázorněný větví B'D křivky na obr. 4.23. (Někdy je tuhost při zatěžování v pokritickém stavu menší než před dosažením kritického stavu.) Odlehčování probíhá po křivce DC. V bodě C dojde k náhlé, ale opačné změně tvaru (úsečka CC' na obrázku; další odlehčování probíhá opět plynule po křivce C'A. Stavů na křivce BC nejsou stabilní a neuskuteční se při monotónním vzrůstu nebo poklesu zatížení. Pokud bychom uměle vnutili skořepině deformaci odpovídající některému bodu na křivce BC, pak při sebemenším impulsu přejde skořepina do stabilního stadia, kterému odpovídá bod na větvi AB nebo CD v závislosti na směru impulsu.

Poznámka. Rozdvojení rovnovážného stavu, kdy může nastat jeden nebo druhý tvar, se označuje jako bifurkace.

4.9 Řešení stabilitních problémů metodou konečných prvků

V této kapitole byly pro snadnější pochopení uváděny jednoduché analytické vztahy pro výpočet kritického zatížení v různých případech. Musíme si ale být vědomi, že v důsledku různých imperfekcí, zejména nepřesností týkajících se tvaru

a místa působení zatížení a jeho přenosu na součást, může k vybočování docházet již při zatížení o dost nižším, než je kritické. To platí obecně pro ztrátu stability tenkostěnných konstrukcí. Spolehlivější je dnes proto vyšetřování jejich únosnosti metodou konečných prvků [19, 20] s použitím vhodného software, např. [21–27]. Ten zpravidla nabízí dva postupy: lineární a nelineární. Uživatel sám musí rozhodnout, který z nich použít. **Lineární analýza** předpovídá teoretickou únosnost ideální elastické součásti při daném způsobu zatížení a okrajových podmínkách. Jedná se vlastně o klasickou analýzu podle Eulera (kap. 4.1), a vhodným postupem se stanoví kritické zatížení. Z matematického hlediska se jedná o nalezení vlastních tvarů [např. n -tý tvar průhybu prutu je $w_n = \sin(n\pi x/l)$] a vlastních hodnot (např. $F_{kr,n} = n^2 \pi^2 EJ/l^2$). Metoda konečných prvků ale umožňuje najít kritická zatížení a vlastní tvary i pro složitější tělesa, než jsou jednom pruhy. V důsledku různých nedokonalostí (tvar, materiál, zatížení) ale bývají vypočtené hodnoty vyšší než zatížení, při kterém skutečně dojde ke zhroutení.

Poznámka. Vlastní tvary deformací při ztrátě stability pružného tělesa souvisí s vlastními tvary (a frekvencemi) obdobného tělesa při rezonanci.

Chceme-li se dozvědět více o deformacích a napětích, popřípadě o způsobu, jakým by konstrukční díl mohl selhat, musíme užít tzv. **nelineární analýzu**, která umožňuje pracovat s velkými deformacemi. Při této analýze probíhá výpočet po krocích. Na počátku je konstrukci udělena počáteční imperfekce (například velmi malá deformace anebo vyosení působící síly) a po malých krocích je postupně zvyšováno zatížení. Pro každý přírůstek zatížení se vypočítá pozměněný tvar součásti a přepočte se matice tuhosti konstrukce, která se pak užije v následujícím kroku. Velikosti přírůstků buď definuje uživatel, nebo jsou přiřazovány automaticky programem. Kritické zatížení je takové, při kterém konstrukce ztrácí stabilitu, takže velmi malý přírůstek zatížení způsobí veliký nárůst deformací. Nelineární analýza umožňuje vyšetřovat chování také v pokritickém stavu, například u skořepin, kdy při dosažení nejnižšího kritického zatížení dojde ke změně tvaru (např. vyboulení). Ale i potom je součást po určitou dobu schopna vzdorovat zvyšování zatížení.

Literatura ke kapitole 4.

1. Augustyn, J., Śledziwski, E.: Havárie ocelových konstrukcí. SNTL, Praha, 1988. 208 s.
2. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.

3. Novák, O. a kolektiv: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství. Tech. průvodce sv. 3. SNTL, Praha, 1963. 536 s.
4. Černoch, S.: Strojně technická příručka. Díl 1. 12. přepracované vydání. SNTL, Praha, 1968. 1183 s.
5. Mrňák, L., Drdla, A.: Mechanika. Pružnost a pevnost pro SPŠ strojnické. SNTL, Praha, 1981. 368 s.
6. Čalkovský, A.: Únosnost tenkostěnných konstrukcí. Stavba strojů 94. DT ČSVTS, Praha, 1984. 130 s.
7. Den Hartog, J. P.: Advanced strength of materials. Dover Edition, 1978. McGraw-Hill, New York, 1952. 378 s.
8. Hájek, E., Puchmajer, P.: Stabilita pružných soustav. ČVUT, Praha, 1981. 174 s.
9. Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL, Praha, 1989. 600 s.
10. Volmir, A. C.: Ustojčivost' uprugich sistem. GOSIZDAT fiziko-matematičeskoj literatury. Moskva, 1963.
11. Kolektiv, Pružnost a pevnost II. ČVUT, Praha, 1985. 214 s.
12. Timoshenko, S. P., Gere, J.: Theory of elastic stability. McGraw-Hill, Dover Publications, New York, 1961. 541 s. Volně na file:///D:/Data/iame0638/Stazene/dlscib.com_theory-of-elastic-stability-timoshenko-amp-gere-mcgrawhill-2nd-edition.pdf (26. 5. 2020).
13. Binder, R.: Mechanika III. Pevnosť a tuhosť strojových súčiastok a konštrukcií. SVTL, Bratislava, 1966. 416 s.
14. Čalkovský, A.: Tenkostěnné konstrukce I. Stavba strojů 75. DT ČSVTS, Praha, 1980. 134 s.
15. Krutina, J.: Sběrka vzorců z pružnosti a pevnosti. SNTL, Praha, 1962. 240 s.
16. Lizin, V. T., Pjatkin, V. A.: Projektirovanije tonkostěnných konstrukcij. 2. vyd. Mašinostrojenije, Moskva, 1985. 344 s.
17. Placák, V., Kunc, J.: Výpočet napjatosti skořepin. SNTL, Praha, 1966.
18. Esslinger, M., Geier, B.: Postbuckling Behavior of Structures. Springer, Wien-New York, 1975. ISBN 3-211-81369-1.
19. Kolář, V., Němec, I., Kanický, V.: FEM – principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 2001. 401 s.

20. Menčík, J.: Aplikovaná mechanika materiálů. Univerzita Pardubice, 2019. 196 s. Volně dostupná na: <https://dk.upce.cz/handle/10195/72947> nebo přes <https://eshop.upce.cz>
21. FEM Computer program ANSYS 11. Ansys Corporation.
22. FEM Computer program COSMOS Works 2010. Advanced Professional. SolidWorks Corporation.
23. FEM Computer program COSMOS/M, version 2.95, 2010.
24. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>
25. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaqusexplicit/>
26. <https://www.mssoftware.com/product/marc>
27. <https://www.mssoftware.com/product/msc-one>
28. Tomek, P., Středová, D.: Postbuckling behavior of saddle loaded shell. Sci. Pap. University of Pardubice. series B, The Jan Perner Transport Faculty. Pardubice, 2009.
29. Paščenko, P., Středová, D., Tomek, P.: Stability of thin-walled structures. Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering. Vol. 15 (2010) pp. 483 – 490. University Press Zielona Góra, Zielona Góra.
30. Paščenko, P.: Stabilita tenkostěnných skořepinových konstrukcí v dopravní technice. Habilitační práce. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2009.
31. Tomek, P., Paščenko, P.: Influence of boundary conditions on the loss of stability of imperfect spherical caps. Proc. 13th Conf. Applied Mechanics 2011, pp. 223 – 226. ÚFM AV ČR Brno, 2011. ISBN 978-80-87434-03-1.
32. Tomek, P.: Vliv počátečních imperfekcí na pevnost a stabilitu tenkostěnných skořepinových konstrukcí. Disertační práce. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2012.
33. Bushnell, D.: Computerized buckling analysis of shells. Martinus Nijhoff Publishers. Dordrecht, 1985. ISBN 90-247-3099-6.
34. Vlasov, V. Z.: Obščaja teorija oboloček i jejo priloženija v tehnike. GITTL, Moskva, 1949. 784 s.
35. Wunderlich, W., Albertin, U.: Buckling behaviour of imperfect spherical shells. Int. J. Non-Linear Mechanics 37, pp. 589 – 604. Elsevier Science Ltd., 2002.

5. Teplotní napětí v tenkostěnných prvcích

Vliv změn teploty na tenkostěnné a štíhlé součásti ukážeme na několika případech.

5.1 Dlouhá tyč při změně teploty

Mějme přímou homogenní tyč délky L s konstantním průřezem S . Změní-li se její teplota v celém objemu z T_0 na T , změní se délka volné tyče o

$$\Delta L = \alpha (T - T_0)L = \alpha \Delta T L, \quad (5.1)$$

kde α je teplotní součinitel délkové roztažnosti.

Jestliže upevnění tyče zabrání volným dilatacím, objeví se v ní napětí o velikosti

$$\sigma = \alpha \Delta T E \quad (5.2)$$

a celková síla

$$F = \alpha \Delta T E S. \quad (5.3)$$

Při ochlazení je tato síla tahová, při ohřevu tlaková. Vysoké tahové napětí by mohlo způsobit až přetržení tyče. Naopak tlaková síla by při dosažení kritické hodnoty (4.5) vedla u štíhlé tyče k vybočení, jak bylo ukázáno v kapitole 4. Důležitou roli hraje způsob upevnění konců tyče (obr. 4.3), a také momenty setrvačnosti průřezu v ohybu ve dvou hlavních směrech, J_1, J_2 .

Kombinací rovnice (5.3) a vztahu (4.5) pro kritickou sílu dostaneme odpovídající kritickou hodnotu zvýšení teploty tyče, při které může dojít k jejímu vybočení:

$$\Delta T_{kr} = \frac{\pi^2 J}{\alpha l_0^2 S} = \frac{\pi^2}{\alpha \lambda^2}; \quad (5.4)$$

J je moment setrvačnosti průřezu, l_0 je tzv. vzpěrná délka, vysvětlená v kapitole 4, a λ je tzv. štíhlostní poměr tyče, definovaný vztahem (4.9). K vybočení dojde ve směru, ke kterému je moment setrvačnosti nejnižší. Je-li zvýšení teploty větší než ΔT_{kr} , roste délka tyče a tedy i její prohnutí při konstantní vzdálenosti opor, ale síla již téměř nestoupá. U prutu s otevřeným tenkostěnným průřezem může být vybočování spojeno i s jeho zkrucováním. Důležitou roli hrají také imperfekce, například počáteční zakřivení prutu z výroby nebo excentricita působící síly; v takových případech dochází k postupnému prohýbání i při nižších zatíženích.

Obecně lze vypočítat velikost prohnutí a napětí odpovídající předpokládané změně teploty. Více o těchto otázkách lze najít v kapitole 4 a literatuře tam citované.

5.2 Dlouhá tyč se spádem teplot napříč tloušťkou

Mějme homogenní tyč tloušťky t . Hořejší povrch má teplotu T_1 , spodní má teplotu $T_2 < T_1$. Je-li rozložení teplot napříč tloušťkou lineární, prohne se **volná tyč** do tvaru kruhového oblouku (obr. 5.1a). Obě čela svírají úhel φ . Osa prohnuté tyče má poloměr R , hořejší povrch má poloměr $R_1 = R + t/2$ a délku $L_1 = (R + t/2)\varphi$, spodní povrch má poloměr $R_2 = R - t/2$ a délku $L_2 = (R - t/2)\varphi$. Rozdíl délek, $\Delta L = L_1 - L_2 = t\varphi$, byl způsoben rozdílem teplot $\Delta T = T_1 - T_2$, takže platí také $\Delta L = \alpha \Delta T R \varphi$. Porovnáním obou výrazů pro ΔL dostaneme poloměr křivosti osy tyče [3, 4]:

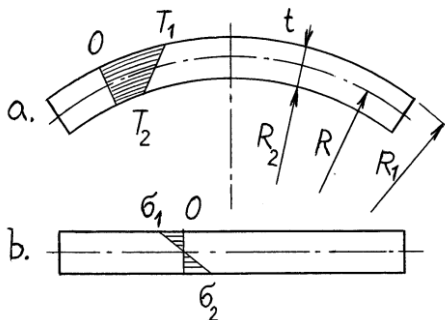
$$R = \frac{t}{\alpha \Delta T} , \quad (5.5)$$

Tyč je prohnutá, ale nepůsobí v ní žádné napětí. (*Podobným způsobem se prohne například i dlouhá kosmická loď, je-li její jedna strana trvale ozářena Sluncem.*)

Je-li tyč **upevněná** tak, že se nemůže prohnout, objeví se v ní napětí lineárně rozložené napříč tloušťkou (obr. 5.1b). Toto napětí vyvozuje moment, který eliminuje dříve zmíněné zakřivení volné tyče; platí

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ} ; \quad (5.6)$$

E je modul pružnosti v tahu a J moment setrvačnosti průřezu v ohybu. Pro obdélníkový průřez o šířce b a tloušťce t ve směru spádu teploty je $J = bt^3/12$.



Obr. 5.1. Tyč s lineárním spádem teplot napříč tloušťkou t . **a** – volná tyč, **b** – tyč bez možnosti prohnutí.

Odpovídající napětí ve vzdálenosti z od neutrální osy je

$$\sigma(z) = \alpha [T_{stř} - T(z)] E, \quad (5.7)$$

kde $T_{stř}$ je střední teplota tyče a $T(z)$ je teplota ve vyšetřovaném místě:

$$T(z) = \frac{T_1 + T_2}{2} - (T_1 - T_2) \frac{z}{t} = T_{stř} - \Delta T \frac{z}{t}. \quad (5.8)$$

V ose tyče je napětí rovno nule, na chladnějším povrchu ($z = -t/2$) působí tahové napětí $\sigma_1 = \frac{1}{2} \Delta T \alpha E$, na teplejším povrchu ($z = +t/2$) působí stejně velké napětí tlakové, $\sigma_2 = -\frac{1}{2} \Delta T \alpha E$.

5.3 Kruhová deska při změně teploty

Uvažujme tenkou kruhovou desku o tloušťce t a poloměru a . Je-li změna teploty stejná v celém objemu a deska je volná, potom se všechny její rozměry zvětší v poměru $\alpha \Delta T$ a tvar se nezmění. Je-li **vetknutá do tuhé konstrukce**, vznikne v ní dvojosá izotropní napjatost s napětím [3, 4]:

$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{\alpha \Delta T E}{1 - \mu}. \quad (5.9)$$

Při ohřátí bude toto napětí tlakové, a pokud dosáhne kritické hodnoty

$$\sigma_{kr} = c E^* \left(\frac{t}{a} \right)^2, \quad (5.10)$$

začne se deska prohýbat [1, 2]. V tomto vztahu je $E^* = E/(1 - \mu^2)$ je redukovaný modul pružnosti pro desky, a konstanta c pro vetknutý okraj je $c = 14,68$. Radiální napětí ve vztahu (5.9) dosáhne kritické hodnoty pro změnu teploty ΔT_{kr} . Z rovnosti tohoto vztahu a (5.10) dostaneme zvýšení teploty odpovídající začátku boulení:

$$\Delta T_{kr} = \frac{c}{\alpha(1 + \mu)} \left(\frac{t}{a} \right)^2. \quad (5.11)$$

Tenká kruhová deska s lineárním spádem teplot napříč tloušťkou

Situace je podobná předchozímu případu a platí také obr. 5.1b.

Volná deska

Tato deska se prohne do tvaru části kulové plochy o poloměru R daném vzorcem (5.5), a nepůsobí v ní žádné napětí. (Podmínkou je, že její průhyb je malý ve srovnání s tloušťkou; v opačném případě se objeví i membránová napětí.)

Prohnutí je znemožněno

Je-li nějakým způsobem zabráněno prohnutí, má-li deska například vetknuté okraje nebo je celou plochou pevně spojena s tuhým podkladem, vzniknou v ní napětí v radiálním i obvodovém směru. Má-li vetknutý okraj, bude v něm působit v radiálním směru ohybový moment tak velký, že eliminuje zakřivení desky vyvolané teplotním spádem napříč tloušťkou. Deska zůstane rovná a napjatost je izotropní rovinná, s radiálním momentem na jednotku šířky vetknutého okraje [4]:

$$M' = \frac{\alpha \Delta T (1 + \mu) D}{t}, \quad (5.12)$$

kde

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (5.13)$$

je jednotková ohybová tuhost desky. Radiální napětí je rozloženo lineárně napříč tloušťkou desky; je rovno nule ve střední rovině, a maximální na povrchu [4]:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{6M'}{t^2} = \pm \frac{\alpha \Delta T}{2} \frac{E}{1 - \mu}. \quad (5.14)$$

Na chladnějším povrchu působí napětí tahové (znaménko +), na teplejším povrchu tlakové (znaménko -).

5.4 Obdélníková deska s lineárním spádem teplot napříč tloušťkou

Volná obdélníková deska se spádem teplot napříč tloušťkou

Tato deska se prohne; její střed se vybojí směrem k vyšší teplotě. V místech vzdálených od okrajů se deformuje do tvaru části kulové plochy o poloměru daném vztahem (5.5).

Okraje desky jsou volně podepřené

Deska se může na okrajích pootáčet ve směru kolmém k okraji. Je-li hořejší povrch

teplejší, střed desky se prohne ve směru vyšší teploty (obr. 5.1a). Poměrná prodloužení ve vzdálenosti z od neutrální roviny závisí na poměrných prodlouženích $\varepsilon_{x,0}$, $\varepsilon_{y,0}$ a poloměrech křivosti R_x , R_y této roviny (tj. pro $z = 0$):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + \frac{z}{R_x}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y,0} + \frac{z}{R_y}. \quad (5.15)$$

Je-li deska upevněná tak, že se nemůže prohnut, je v příslušném směru $1/R = 0$.

Okraje desky jsou vetknuté, průhyb je znemožněn

V místech vzdálených od okrajů je dvouosá izotropní napjatost a platí $\sigma_x(z) = \sigma_y(z) = \sigma(z)$, $\varepsilon_x(z) = \varepsilon_y(z) = \varepsilon(z)$. Poměrná prodloužení jsou součtem prodloužení od napětí (podle Hookeova zákona) a od teplotních deformací [1, 5]:

$$\varepsilon_x(z) = \frac{1}{E(z)} [\sigma_x(z) - \mu(z)\sigma_y(z)] + \alpha[T(z) - T_0], \quad (5.16a)$$

$$\varepsilon_y(z) = \frac{1}{E(z)} [\sigma_y(z) - \mu(z)\sigma_x(z)] + \alpha[T(z) - T_0]; \quad (5.16b)$$

E je Youngův modul, μ je Poissonovo číslo, α je délkový součinitel teplotní roztažnosti, T je okamžitá teplota a T_0 je počáteční teplota, při které jsou teplotní napětí rovna nule. Z rovnic (5.16a, b) lze vyjádřit napětí jako funkce poměrných prodloužení [5]:

$$\sigma_x(z) = \frac{E(z)}{1 - \mu^2(z)} [\varepsilon_x(z) + \mu(z)\varepsilon_y(z) - (1 + \mu)\alpha[T_0 - T(z)]] \quad (5.17a)$$

$$\sigma_y(z) = \frac{E(z)}{1 - \mu^2(z)} [\varepsilon_y(z) + \mu(z)\varepsilon_x(z) - (1 + \mu)\alpha[T_0 - T(z)]]. \quad (5.17b)$$

5.5 Tenká kruhová deska s teplejší centrální oblastí

Nechť u tenké kruhové desky s rovnoměrně rozloženou teplotou dojde v malé centrální části o poloměru a k nárůstu teploty o ΔT . Uvnitř ohřáté části působí v radiálním a obvodovém směru tlakové napětí

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{1}{2} \alpha \Delta T E. \quad (5.18)$$

Vně této oblasti ve vzdálenosti r od osy platí pro radiální a obvodové napětí

$$\sigma_r, \sigma_\theta = \frac{1}{2} \alpha \Delta T E a^2 / r^2, \quad (5.19)$$

přičemž radiální napětí je v tomto případě tlakové a obvodové napětí je tahové. Na hranici ohřáté oblasti působí maximální smykové napětí $\frac{1}{2} \alpha \Delta T E$.

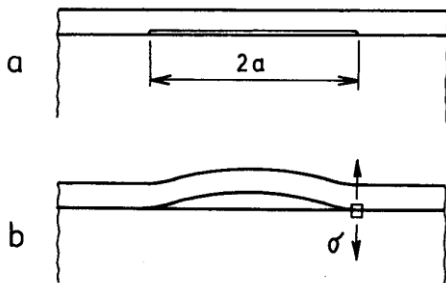
Při určité velikosti tlakového napětí v radiálním směru může dojít k vyboulení desky. Při tloušťce t a poloměru centrální části a je kritická velikost radiálního tlakového napětí [6]:

$$\sigma_{r,kr} = k \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{t}{a} \right)^2, \quad (5.20)$$

kde $k = 0,35$ při volně podepřených okrajích, a $k = 1,22$ při vetknutých okrajích. V případě ohřáté centrální části bude k blíže k hořejší hodnotě. Kombinací vztahu (5.18) a (5.20) dostaneme, že vyboulení lze očekávat při ohřevu centrální části o

$$\Delta T_{kr} = \frac{2k}{\alpha(1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2. \quad (5.21)$$

Podobná situace může nastat u součásti s povlakem, u kterého v některém místě došlo k lokální delaminaci. Je-li povrch povlaku ohříván, přestup tepla z něj do substrátu je v tomto místě ztížen a povlak se zde ohřívá více než v okolí – vzniká tzv. horká skvrna (hot spot) s vysokým tlakovým napětím v rovině povlaku, který se zde může vyboulit jako deska (obr. 5.2). Na okraji delaminace pak vzniká koncentrace napětí podobně jako v kořeni trhliny. Za určitých podmínek se může tato delaminace samovolně šířit; roli hraje napětí, geometrie delaminace a povlaku, a lomová houževnatost rozhraní. Situace je podrobněji rozebrána v [7 – 9], kde jsou též odkazy na další práce.



Obr. 5.2. Delaminace povlaku v místě vzdáleném od okraje. a – geometrie, b – horká skvrna, poměry při boulení.

Napětí v tenkém kotouči a tyči s osově symetrickým rozložením teplot

Je-li tenký kotouč o poloměru R ohříván osově symetricky (a rovnoměrně napříč tloušťkou), takže teplota v určitém místě je funkcí pouze vzdálenosti r od osy, je radiální a obvodové napětí ve vzdálenosti r [5, 10]:

$$\sigma_{r1} = \alpha E \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right), \quad (5.22a)$$

$$\sigma_{t1} = \alpha E \left(-T + \frac{1}{R^2} \int_0^R Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right), \quad (5.22b)$$

kde R je poloměr disku a T je teplota ve vzdálenosti r od osy (mínus teplota nejchladnějšího místa disku). Záporný výsledek značí tlakové napětí. Napětí v osovém směru je rovno nule.

Pro dlouhou tyč kruhového průřezu o poloměru R můžeme pro radiální a obvodové napětí použít vztahy (5.22), jestliže v nich místo E dosadíme $E/(1 - \mu)$. Navíc se objeví napětí σ_z v osovém směru. Je-li tyč volná, platí [5]:

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \mu} \left(\frac{2}{R^2} \int_0^R Tr dr - T \right). \quad (5.23a)$$

Jestliže vetknuté konce znemožní dilatace v osovém směru, je osově napětí rovno

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1 - \mu} \left(\frac{2\mu}{R^2} \int_0^R Tr dr - T \right). \quad (5.23b)$$

5.6 Tenkostěnná válcová trubka při změně teploty

Nechť tenkostěnná trubka o poloměru R a tloušťce stěny $t \ll R$ je vystavená změně teploty. Všimneme si zde tří případů: 1) je úplně volná, 2) má konce vetknuté v tuhé konstrukci, 3) vnitřek trubky má odlišnou teplotu než vnějšek.

1. Trubka je volná

Při zvýšení teploty rovnoměrně v celém objemu o ΔT se poloměr trubky zvětší o $\Delta R = R\alpha\Delta T$. Průměr se zvětší o $\Delta d = 2\Delta R$ a délka L se prodlouží o $\Delta L = L\alpha\Delta T$. V podobném poměru se zvětší i tloušťka stěny. Žádná napětí ani síly nevzniknou.

2. Trubka má konce vetknuté v tuhé konstrukci

Má-li trubka v celém objemu konstantní teplotu, změní se její průměr v místech dostatečně vzdálených od konců o $\Delta R = R\alpha\Delta T$. Objeví se zde také rovnoměrně rozložené osově napětí o velikosti $\sigma_a = \alpha\Delta TE$; index a značí axiální. Došlo-li ke zvýšení teploty trubky, bude toto napětí tlakové; v opačném případě bude tahové. Poblíž konce [pro vzdálenosti $x < 2,4\sqrt{Rt}$] je rozložení napětí složitější; v osovém (axiálním) směru se kromě zmíněného membránového napětí objeví ještě napětí ohybové, s maximální hodnotou na vnějším a vnitřním povrchu [3, 4]

$$\sigma_{o,a} = \pm 1,82 \alpha \Delta T E e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x), \quad (5.24)$$

kde konstanta β byla definována vzorcem (3.29) v kapitole 3. V obvodovém směru bude působit napětí membránové, rozložené napříč tloušťkou rovnoměrně,

$$\sigma_{t,m} = \alpha \Delta T E e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad (5.25)$$

a napětí ohybové

$$\sigma_{t,b} = \mu \sigma_{o,a}. \quad (5.26)$$

Výsledné obvodové napětí na povrchu je rovno součtu obou složek,

$$\sigma_t(x) = \sigma_{t,m}(x) + \sigma_{t,b}(x). \quad (5.27)$$

3. Vnitřek trubky má odlišnou teplotu než vnějšek

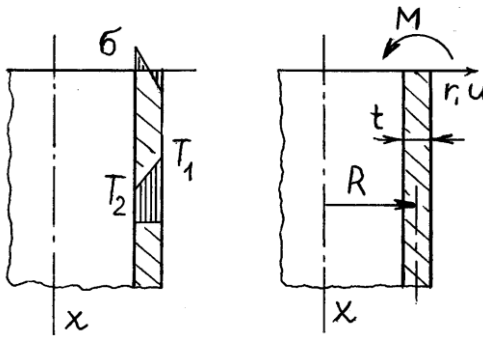
Teploty vnějšího a vnitřního povrchu jsou T_1 a T_2 (obr. 5.3). V nejjednodušším případě je spád teplot mezi oběma povrchy lineární. Je-li trubka vetknutá do tuhé konstrukce nebo je-li volná, bude v místech vzdálených od čel působit v osovém směru napětí

$$\sigma(x, z) = \alpha [T_{stř} - T(x, z)] E / (1 - \mu), \quad (5.28)$$

kde z je vzdálenost v radiálním směru od střední plochy. Je tedy rozloženo podobně jako ohybové napětí v širokém nosníku. Maximálních hodnot nabývá na povrchu:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{6M'}{t^2} = \pm \frac{\alpha (T_2 - T_1) E}{2(1 - \mu)}. \quad (5.29)$$

Znaménko plus (tahové napětí) odpovídá chladnějšímu povrchu, znaménko mínus a tlakové napětí odpovídá teplejšímu povrchu. Jednotkový moment M' má rozměr N.



Obr. 5.3. Tenkostěnná trubka při spádu teplot napříč stěnou. Rozložení napětí na volném okraji a přidavný moment M .

Jsou-li konce trubky volné, je situace složitější, protože na nich musí být osově napětí rovno nule. Toho docílíme, přiložíme-li k volnému čelu napětí rozložená stejně jako podle rovnice (5.28), ale opačného smyslu, tj. přiložíme-li zde ohybový moment rovnoměrně rozložený podél obvodu (obr. 5.3), o jednotkové velikosti [3]:

$$M' = \frac{\alpha (T_1 - T_2) E t^2}{12(1 - \mu)}. \quad (5.30)$$

Jeho účinkem dochází ke změně poloměru trubky, který se mění se vzdáleností x od volného čela takto [1, 3, 5]:

$$u = - \frac{M'}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad (5.31)$$

β je dáno vztahem (3.29). Největší změna poloměru je na volném konci ($x = 0$):

$$u_{\max} = - \frac{M'}{2\beta^2 D}; \quad (5.32)$$

odpovídající obvodové napětí v tomto místě je

$$\sigma_{o, \max} = \frac{M'}{2\beta^2 D} \frac{E}{R} = \frac{\alpha (T_1 - T_2) E}{2\sqrt{3}(1 - \mu)} \sqrt{1 - \mu^2}; \quad (5.33)$$

ohybový moment M' je dán vztahem (5.30). Současně působí ohybové momenty i v obvodovém směru, neboť průřez trubky zůstává kruhový. Tyto momenty mají velikost

$$\mu M' = \mu \frac{\alpha(T_1 - T_2)E t^2}{12(1 - \mu)}. \quad (5.34)$$

Nejvyšší teplotní napětí působí v obvodovém směru na vnějším povrchu trubky a sestává ze tří složek [3 – 5]: 1) napětí dané vztahem (5.29), 2) obvodové napětí určené vztahem (5.33), a napětí vyvolaná ohybovými momenty (5.34). Celkové napětí na povrchu je tedy:

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha(T_1 - T_2)E}{2(1 - \mu)} \left(1 + \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{3}} - \mu \right). \quad (5.35)$$

Například při $\mu = 0,3$ bude maximální napětí vyšší o 25% než napětí v místech vzdálených od čel; při $\mu = 0,2$ bude vyšší dokonce o 35%. Pokud by trubka byla z křehkého materiálu a měla na čele trhlinu, mohla by tato trhlina při dostatečné velikosti napětí růst, a to v osovém směru. Zvýšení napětí má místní charakter; ve vzdálenosti $x \geq 3\sqrt{Rt}$ od konce již bude napětí prakticky shodné s napětím (5.28).

Literatura ke kapitole 5.

1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
2. Hájek, E., Puchmajer, P.: Stabilita pružných soustav. ČVUT, Praha, 1981. 174 s.
3. Timošenko, S. P.: Soprotivlenije materialov II. Nauka, Moskva, 1965. 480 s.
4. Timošenko, S. P., Vojnovskij-Krieger, S.: Plastinki i oboločki. (Překlad z angl.) Nauka, Moskva, 1966. 636 s.
5. Timošenko, S. P., J. Goodier: Teorija uprugosti. (Překlad z angl.) Nauka, Moskva, 1975. 578 s.
6. Timoshenko, S. P., Gere, J.: Theory of elastic stability. McGraw-Hill, Dover Publications, New York, 1961. 541 s.
7. Menčík, J.: Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1996. 360 s.
8. Menčík, J.: Výpočty strojních částí s povrchovými úpravami na pevnost a životnost. DT ČSVTS (Cyklus Stavba strojů, č. DT01-211-91). Praha, 1991. 120 s.
9. Menčík, J.: Mechanics of delamination of thin films under thermal and residual compressive stresses. Ceramics – Silikáty, 36 (1992), č. 2, s. 93 – 100.
10. Young, W. C.: Roark's Formulas for Stress and Strain. 6th Edition. McGraw-Hill, New York, 1989. 763 s.

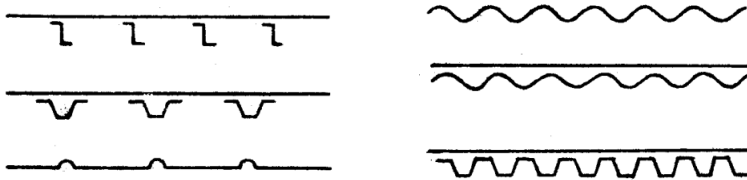
6. Navrhování tenkostěnných konstrukcí

V této kapitole se podíváme na navrhování z několika hledisek. Nejprve si všimneme různých konstrukčních řešení, dále vysvětlíme, jak lze pomocí rozměrové analýzy a teorie podobnosti získat více informací a využít jeden návrh ve více případech, a nakonec ukážeme, jak lze při návrhu snížit nejistoty způsobené náhodným kolísáním některých veličin.

6.1 Konstrukční řešení

Konkrétní konstrukční provedení závisí na účelu součásti. V některých odvětvích se ustálila řešení typických částí s charakteristickým namáháním. U letadel se jedná o části trupu nebo křidel, u automobilů nebo vlaků to jsou části karosérií nebo podvozků, ustálené tvary mívají tlakové nádoby anádrže, nebo důležité díly kovových mostů a dálkových elektrických vedení. Napjatost tenkostěnných konstrukcí s důrazem na aplikace v letecké technice je probírána v sérii skript ČVTS z cyklu Stavba strojů [1 – 5] a v monografiích [6 – 8]. Praktickými otázkami navrhování a dimenzování konstrukcí pro chemická zařízení, včetně výpočetních vztahů a diagramů, se zabývají knihy [9 – 10]. Skořepinám jsou věnovány monografie [5, 11 – 14]. Užitečné informace lze najít i v normách, např. [15 – 21].

Velkou roli hraje materiál a technologie vytvoření tenkostěnné součásti, včetně spojování s dalšími díly (svařování, šroubování, nýtování, lepení). Při uspořádání a dimenzování je nutno přihlížet k základnímu charakteru silového působení. Součásti určené pro přenos tahové nebo tlakové síly by měly mít mezi jejími působišti jednoduchý, pokud možno přímý tvar. Zakřivený tvar způsobuje přídavný ohyb, který může přispět ke ztrátě stability, ostré zářezy zase vyvolávají koncentraci napětí. Součásti namáhané tlakovou silou lze zatěžovat až do meze kluzu, pouze jsou-li krátké a masivní nebo tlustostěnné. U tenkostěnných nebo štíhlých součástí existuje riziko zborcení. Pro přenos spojitého zatížení v tečném směru se používají desky nebo skořepiny o relativně velké šířce, které bývají vhodně vyztuženy, například pomocí podélných výztuh připojených ke stěně, vytvořením prolisů (obr. 6.1), použitím vlnitého plechu anebo sendvičového uspořádání (obr. 3.3 v kapitole 3).

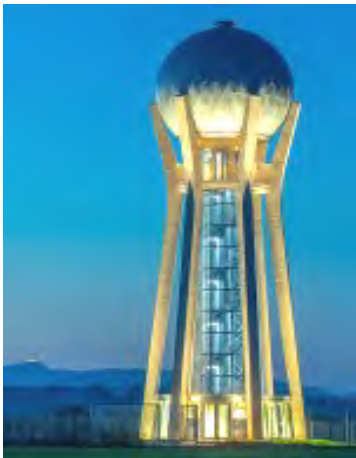


Obr. 6.1. Různá uspořádání vyztužení tenkých stěn [1, 5].

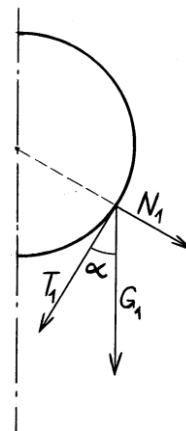
Důležitým materiálem tohoto typu pro některé aplikace je vlnitá lepenka na bázi papíru (obr. 3.4 v kap. 3). Ta se užívá hlavně na různé obaly, protože tlumí účinky nárazu na přepravovaný předmět tím, jak se postupně bortí její jádro. Jsou ale možné i jiné materiály.

V místech působení vnějších sil bývá nutné součást zesílit. Je vhodnější zavádět vnější síly do desek nebo skořepin v tečném směru než kolmo k povrchu, aby vyvolávaly spíše membránová napětí než ohybové momenty. Často ale je nutný jistý kompromis, takže současně působí tečná i normálová síla. Jako příklad vidíme na obr. 6.2a kulovou nádrž na vodu na šesti podpěrách. Každý spoj skořepiny s jednou nohou přenáší šestinu tíhy náplně a skořepiny, $G_1 = (G_n + G_s)/6$. Tato síla se rozloží na složku N_1 ve směru normály a ve směru tečny, T_1 (obr. 6.2b), a platí:

$$N_1 = G_1 \sin \alpha, \quad T_1 = G_1 \cos \alpha. \quad (6.1)$$



a)



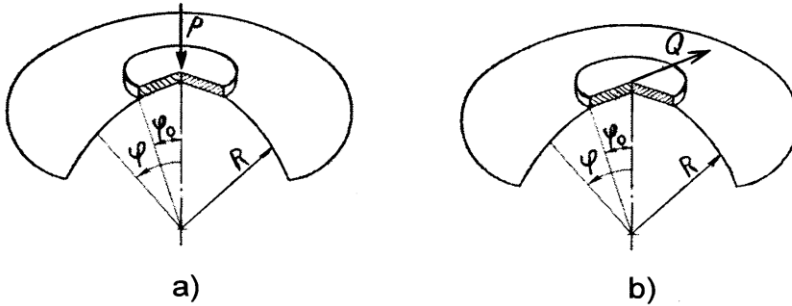
b)

Obr. 6.2. a) Upevnění kulové nádrže na podpěrách. Vodojem Ohrazenice u Turnova (vlevo v pozadí Ještěd); b) síly v místě spoje nohy a skořepiny.

Osamělé síly se zpravidla zavádějí do tenkých stěn na větší ploše, anebo se dané místo lokálně zesílí (obr. 6.3), aby zde nevznikla nežádoucí koncentrace napětí, jež by snižovala únosnost celého dílu nebo jeho odolnost vůči únavě. Při určování velikosti zesílené oblasti lze vyjít z přibližných vztahů [9] pro rozložení maximálního napětí na povrchu hladké skořepiny v okolí osamělých sil:

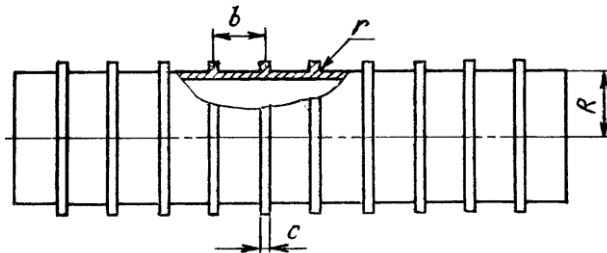
$$\sigma_{\max}(P, r) = \pm 1,43 \frac{P}{t^2} \ln \frac{R}{r}; \quad \sigma_{\max}(Q, r) = \pm 0,26 \frac{Q}{tr}, \quad (6.2)$$

kde R je poloměr skořepiny, t je tloušťka stěny, a r je vzdálenost vyšetřovaného místa od působíště síly.



Obr. 6.3. Zesílení skořepiny v působíšti lokální síly a) normálové, b) tečné [9].

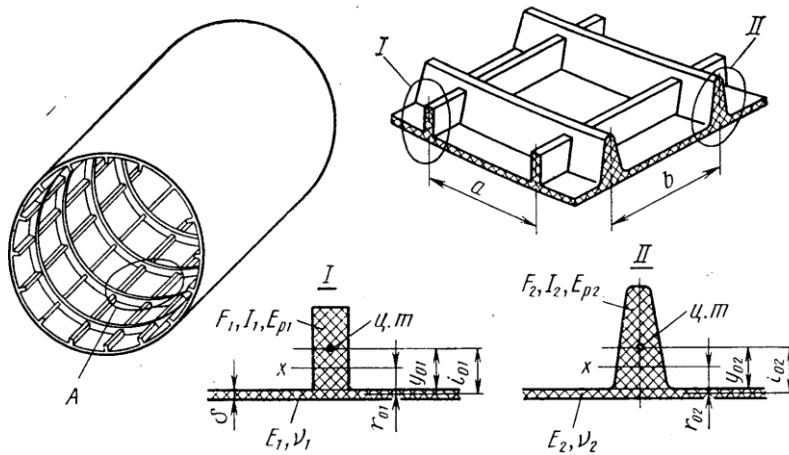
V našem případě na obr. 6.2b je $P = N_1$ a $Q = T_1$. Vztahy (6.2) byly odvozeny pro bodové síly působící na nezesílenou válcovou skořepinu o tloušťce t , a neplatí ve velmi malých vzdálenostech od jejich působíšť. Hranice zesílení skořepiny by měla být zhruba v místech, kde se napětí (6.2) blíží k dovolené hodnotě. Podrobnější vztahy založené na analytickém řešení lze najít v [9, 38, 39]. Přesnější hodnoty, s přihlédnutím k charakteru přenosu síly, se získají metodou konečných prvků.



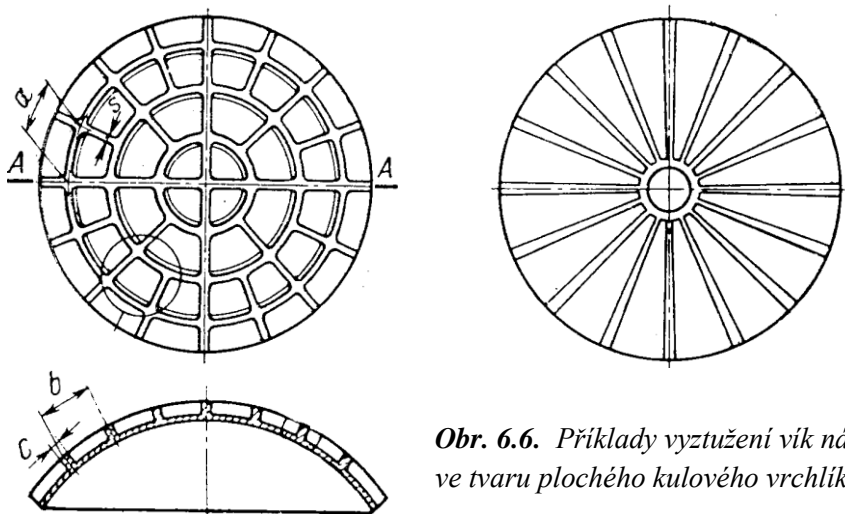
Obr. 6.4. Vytzužení válcové skořepiny sítí vnějších integrálních žebek [9].

U nosníků s otevřeným průřezem je nutné zavádět vnější příčné zatížení do tzv. středu smyku (obr. 1.16, 1.17), aby nedocházelo ke zkrucování příčného průřezu.

Hlavním nebezpečím pro tenkostěnné nosníky nebo skořepiny nebývá namáhání tahové, ale tlakové. Jestliže tlaková síla nebo napětí dosáhne kritické hodnoty, může dojít ke ztrátě stability a k výraznému zdeformování dané součásti, což může zhoršit nebo znemožnit její funkci. Vysoké napětí může způsobit trvalou změnu tvaru, popřípadě zhroucení nebo lom celé konstrukce. Pro snížení tohoto nebezpečí se používají různé výtzuhy a žebra. Obrázek 6.4 ukazuje válcovou skořepinu



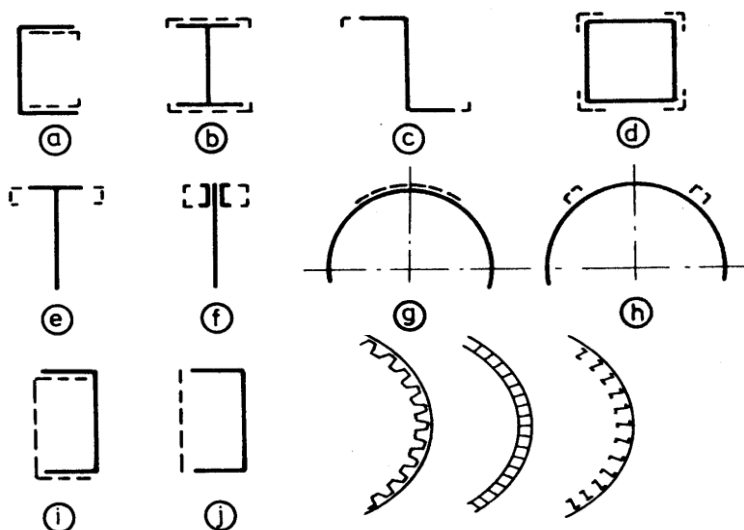
Obr. 6.5. Vytzužení tenkostěnné válcové skořepiny sítí ortogonálních žebor [9].



Obr. 6.6. Příklady vytzužení vik nádob ve tvaru plochého kulového vrchlíku [9].

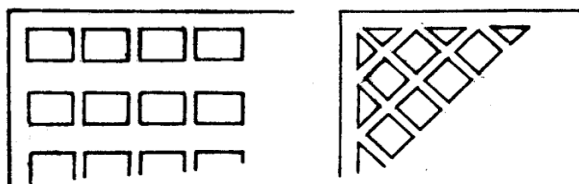
vyztuženou venkovními prstenci pro zvýšení odolnosti vůči vnějšímu přetlaku, a obr. 6.5 ukazuje řez tenkostěnným pláštěm trupu letadla vyztuženým zevnitř soustavou žebér v osovém a obvodovém směru. Na obr. 6.6 jsou dva příklady vík ve tvaru plochého kulového vrchlíku vyztuženého vnějšími žebry.

U tenkých nosníků lze odolnost pásnic vůči boulení zvýšit tím, že se na nich vytvoří lemy nebo prolisy (obr. 6.7); viz též obr. 1.14 a příklad v kapitole 1.2. U silně zatížených desek a skořepin se osvědčuje tzv. integrální uspořádání (obr. 6.4 a 6.8), kde podélné výztuhy jsou součástí tlustší stěny. Takovéto uspořádání umožňuje přenos normálových i smykových zatížení působících v rovině stěny.



Obr. 6.7. Příklady vyztužování tenkých žebér a skořepin [5].

Integrální stěny (obr. 6.8) se někdy vyrábějí lisováním, odfrézováním nebo elektrolytickým obráběním (odleptáním) z masivnějších desek, anebo naopak aditivním způsobem 3D tiskem.



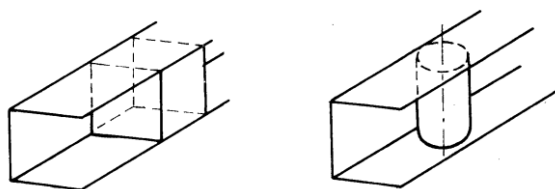
Obr. 6.8. Příklady integrálních stěn vytvořených odleptáním [9].

Slabším místem tenkostěnných skořepin s otevřeným průřezem bývají jejich okraje, které se proto různě tvarují. Při navrhování musíme mít na paměti, že vybočení zpravidla začíná na straně, kde působí tlakové napětí. To se týká mj. ohnutých okrajů tenkostěnných U-profilů namáhaných ohybem, zejména působí-li v pásnicích tlakové napětí. Na obr. 6.9 jsou uvedeny tři příklady všudypřítomných aplikací: dvě nádoby na jídlo, a vidlička pro jednorázové použití. Všechny tyto předměty jsou z plastů, které mají všeobecně nižší tuhost. Návrháři jim věnovali velkou pozornost, mj. proto, aby dosáhli co nejnižší hmotnosti. Někdy se můžeme inspirovat i věcmi kolem nás.



Obr. 6.9. Příklady tvarování tenkostěnných předmětů pro zvýšení tuhosti.

Tenkostěnné otevřené nosníky a součásti bývají méně odolné vůči kroucení. Jejich tuhost lze zvýšit pomocí vhodně rozmístěných antideplanátorů (obr. 6.10) nebo různých přepážek; viz též kapitolu 2.



Obr. 6.10. Antideplanátory pro zvýšení torzní tuhosti otevřených profilů [5].

Existuje-li několik možných způsobů nebo tvarů ztráty stability, nastane nejdříve takový, kterému odpovídá nejnižší kritické zatížení. Při relativně větší tloušťce základní stěny (resp. potahu) a malé rozteči podélných výztuh může kritické

tlakové napětí ve stěně dosáhnout stejné hodnoty, jako má kritické napětí výtuh. Podobná situace je při namáhání krutem. Proti skořepině, vyztužené profily, jež téměř nepřispívají ke zvýšení momentu tuhosti v krutu, jsou výhodnější sendvičové stěny (obr. 3.3) nebo vyztužení souvislým vlnitým plechem po celém obvodu dutiny. U těchto konstrukcí se uplatní všechen nosný materiál, takže se dosáhne mnohem vyšší tuhosti v kroucení a únosnosti.

Ztráta stability představuje velmi širokou problematiku, která přesahuje zaměření této knížky. Jednoduché vztahy pro výpočet kritického zatížení byly uvedeny v předchozí kapitole. Postupy pro dimenzování a kontrolu konstrukcí jsou také obsaženy v různých normách ČSN, ISO, ASME, API, nebo v tzv. Evropských normách EN, např. [15 – 21]. Normové postupy vycházejí z teorie, ale také z rozsáhlých zkušeností, často draze zaplacených. Například u prutů, které budou zatíženy tlakovou silou, se nejprve provádí kategorizace podle tvaru průřezu a jemu odpovídajícího možného způsobu zhroucení – zda se bude spíše jednat o prohnutí celého prutu anebo o lokální vyboulení přírub či stojiny [15, 16]. V normách se také přihlíží k obvyklým nepřesnostem výroby. Normy bývají závazné tam, kde by havárie mohla mít velmi závažné následky (velké konstrukce, letadla, železnice, mosty, tlakové nádoby), ale někdy je to pouze věc dohody mezi výrobcem a zákazníkem. Výhodou norem je, že jsou obvykle výsledkem spolupráce mnoha odborníků, často z různých zemí, a jsou založené na podrobné analýze a experimentálním ověřování. Všeobecně představují normy účinnou cestu k získání bezpečných konstrukcí. Výhodou pro inženýra i pro výrobce nebo stavitele je to, že návrh a výpočty podle osvědčených postupů a vzorců (resp. s použitím příslušného programu) jsou přímočaré a jednoduché. Kromě toho, jestli se konstrukce zřítí a projektant může prokázat, že udělal všechno v souladu s normami, nemůže být stíhán. Naproti tomu, návrh podle norem bývá konzervativní, a normy neřeší všechny možnosti. V takových případech mohou jiné přístupy, založené na analýze metodou konečných prvků, být vhodnější.

6.2 Využití podobnosti a bezrozměrových veličin při návrhu

Navrhované součásti a konstrukce, velké i malé, si jsou někdy podobné. Také výpočetní vztahy bývají v některých případech podobné. Často zkoumáme chování tělesa na počítači nebo na hmotných modelech. Při tom nám může práci usnadnit rozměrová analýza a teorie podobnosti. Ty umožňují zjednodušit experimenty i počítačové modelování, zmenšit jejich rozsah, učinit výsledky obecnějšími a také

přebírat výsledky získané u podobných konstrukcí. Toto téma je probíráno podrobněji ve volně dostupných knihách Aplikovaná mechanika materiálů [23] a Základy experimentální analýzy [24], a proto zde uvedeme jenom hlavní pravidla.

Každá fyzikální veličina je popsána číselnou hodnotou a jednotkou; například 3m. Číselná hodnota říká, kolikrát je vyšetřovaná veličina větší než její jednotka. Každá rovnice, která popisuje fyzikální jev, musí být rozměrově homogenní: její levá strana musí mít stejný rozměr jako pravá strana. Homogenita rozměrů by se měla kontrolovat vždy při odvozování a před použitím nového, ještě neověřeného vztahu, neboť nás může upozornit na závažné chyby.

Téměř každou fyzikální rovnici lze přetransformovat na bezrozměrový tvar. Použití bezrozměrových veličin má řadu výhod. Fyzikální rovnice, vyjádřené jejich prostřednictvím jsou obecnější. Například poměrné posunutí (y/y_0) nebo prodloužení ($\Delta l/l$) nezávisí na jednotlivých veličinách y a y_0 , ale na jejich poměru. Bezrozměrové veličiny umožňují kombinovat výsledky experimentů vykonaných se vzorky o různé velikosti a při různých zatíženích, kdy jedinou podmínkou je jejich správná kombinace. Pro formulování určité závislosti tak lze využít více dat a širší rozmezí parametrů. Výsledky vyjádřené v bezrozměrové formě jsou také univerzálnější, použitelné pro celou třídu podobných objektů, s podobnou geometrií nebo fyzikálními vlastnostmi. Použití bezrozměrových veličin může též ušetřit experimentální práci, protože obvykle platí:

Vztah N veličin, jejichž rozměry lze vyjádřit pomocí D základních rozměrů, lze nahradit vztahem mezi $P = N - D$ bezrozměrovými parametry.

Výhodu tohoto přístupu uvidíme na následujícím příkladu.

Příklad. Chceme zjistit měřením, jak závisí zatížení na začátku boulení tenkostěnného ohýbaného U-profilu, zatíženého tlakovou silou, na jeho parametrech. Veličiny, vstupující do výpočtu kritického zatížení, jsou čtyři: délka profilu, výška stojiny, šířka pásnic, tloušťka stěny. Při zkoumání únosnosti měřením kritického zatížení pro dvě úrovně (dolní a horní) každého parametru, bychom museli uskutečnit $2^4 = 16$ testů. Pokud ale víme, že kritické zatížení závisí jenom na délce profilu a jeho momentu setrvačnosti (který závisí známým způsobem na třech parametrech průřezu), postačí při těchto dvou parametrech pouze $2^2 = 4$ testy – což je výrazné zjednodušení. Kdybychom chtěli vliv každého parametru zkoumat na více úrovních, bylo by zapotřebí více experimentů, a

zmíněná úspora práce by byla ještě vyšší. Tento příklad také ukazuje, jak je důležité provést již na začátku teoretickou analýzu řešeného problému.

Použití bezrozměrových veličin je užitečné i při studiu chování reálných objektů pomocí modelů. To platí i pro počítačové modelování! Stavba velké konstrukce bývá provázena mnoha nejistotami, a ztráty v důsledku chybného návrhu by mohly být velmi vysoké. Proto se nejprve zpravidla vytvoří a testuje menší model. Pokud však má tento model adekvátně odpovídat chování skutečného objektu, musí mezi nimi existovat především geometrická podobnost, tj. shodnost tvaru včetně odpovídajících úhlů a úměrnost odpovídajících rozměrů (tzv. měřítko). Platí následující relace:

$$\text{Rozměr modelu} = \text{Měřítko} \times \text{Rozměr skutečného objektu}$$

Například model budovy v měřítku 1:20 má dvacetkrát menší rozměry než skutečný dům. Ale i další veličiny musí být ve správných poměrech.

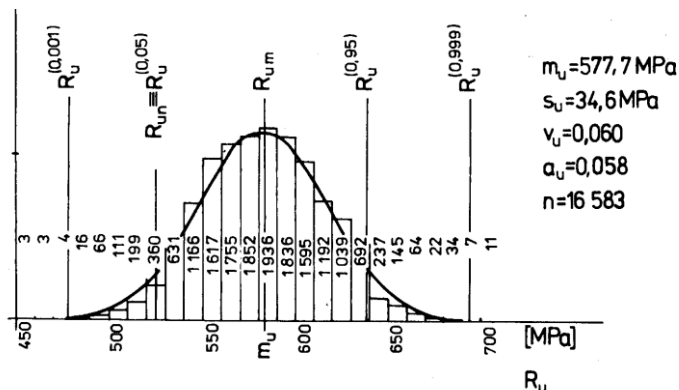
Bezrozměrové proměnné lze vytvářet různými způsoby. Nejjednodušší je poměr určité veličiny a její charakteristické hodnoty, např. x/x_0 nebo $\Delta x/x_0$ pro vzdálenost nebo posunutí. V pružnosti a pevnosti je dobře známé poměrné prodloužení ($\varepsilon = \Delta L/L$), Poissonovo číslo μ (poměr relativního zkrácení v příčném směru k relativnímu prodloužení ve směru zatížení), nebo koeficient tření f , definovaný jako poměr síly, potřebné k posouvání tělesa po jiném tělese, a normálové síly, která obě tělesa přitlačuje k sobě. Tam, kde může dojít ke ztrátě stability zborcením konstrukce nebo její části, je vhodnou bezrozměrovou veličinou poměr zatížení a jeho kritické hodnoty, F/F_{kr} . U tenkostěnných rotačních skořepin se užívá tzv. parametr tenkostěnnosti, což je bezrozměrový poměr poloměru skořepiny a tloušťky stěny, R/t . Jinou bezrozměrovou veličinou u válcových skořepin je βx , kde $x(m)$ je poloha vyšetřovaného místa v osovém směru, a β je konstanta, charakterizující tuhost skořepiny; její rozměr je m^{-1} ; viz vztah (3.30).

Dalším příkladem je bezrozměrová poloha, $\xi = (x - x_{min})/(x_{max} - x_{min})$, kde x_{max} a x_{min} představují krajní hodnoty souřadnic. Varianta tohoto přístupu se užívá také u izoparametrických konečných prvků. Podobně lze vyjádřit i čas. Pro univerzální popis přenosu tepla se užívá bezrozměrová teplota, $\theta = (T - T_{\infty})/(T_0 - T_{\infty})$, kde T_0 je počáteční a T_{∞} konečná teplota. Bezrozměrové musí být i argumenty v matematických funkcích typu sin, cos, log nebo exp. V opačném případě by změna jednotek (např. metry místo mm) změnila numerickou hodnotu výsledku. Podrobnější postupy pro vytváření bezrozměrových parametrů lze najít v [24].

U tenkostěnných součástí hraje velkou roli ztráta stability vybočením nebo zborcením. Jako užitečná bezrozměrová veličina se užívá relativní velikost zatížení ve srovnání s kritickou hodnotou. Podobně kritické napětí (viz např. vztahy 4.24 a 4.25) se vyjadřuje jako funkce štiřlostního poměru, který je bezrozměrový. Kritické napětí v elastickém oboru také závisí na modulu pružnosti, takže zde lze zavést bezrozměrovou veličinu „kritické napětí / modul pružnosti“.

6.3 Pravděpodobnostní hlediska navrhování konstrukcí

Při návrhu a dimenzování jakékoliv součásti musíme někdy přihlížet ke kolísání důležitých veličin, jako je pevnost, rozměry, zatížení a okolní vlivy. Například kolísá pevnost materiálů. Na obr. 6.11 je histogram pevnosti oceli třídy 11523, sestroyený ze souboru více než 16000 vzorků. Přestože se u všech zkoušek jednalo o ocel téže třídy, je šířka intervalu, ve kterém se naměřené hodnoty pohybovaly, obrovská. Při konstrukčním návrhu chceme mít jistotu, že součást bezpečně přenese předpokládané zatížení nebo napětí. Veliké rozptýlení jednotlivých hodnot ale naznačuje, že i kdybychom jako zaručenou pevnost použili nejnižší naměřenou hodnotu, nemáme jistotu, že se nevyskytne ještě slabší vzorek. Proto se někdy postupuje tak, že se rozložení naměřených pevností aproximuje nějakým vhodným rozdělením pravděpodobnosti, např. Weibullovým nebo logaritmiccko-normálním, a jako nejnižší očekávatelnou hodnotu uijeme takovou, pro kterou existuje jen velmi malá (přijatelná) pravděpodobnost, že se může vyskytnout výrobek ještě slabší.



Obr. 6.11. Histogram meze pevnosti oceli třídy 11 523 [25].

Kolísají i rozměry součástí. Kritické zatížení tlačných součástí zase výrazně závisí na imperfekcích, jako je prohnutí přímé osy nebo poloha působíště zatěžujících sil. Rozměry průřezu kolísají již z výroby, ale i kvůli korozi. Samozřejmě kolísá i zatížení, například vyvozované větrem. Normy pro navrhování konstrukcí k tomuto kolísání přihlížejí, a pracují s tzv. normovanými hodnotami. U pevnosti to bývají takové hodnoty, pro které existuje pouze nízká pravděpodobnost, že by se mohla vyskytnout pevnost ještě nižší. U zatížení zase normy pracují naopak s relativně vysokými hodnotami, které by mohly být překročeny také jen s nízkou pravděpodobností. Návrh podle norem je závazný pouze v některých případech. Nemusí být vždy hospodárný, a nezohledňuje všechny možnosti, které se mohou vyskytnout. Někdy proto může být vhodnější použít pravděpodobnostní přístup. Byla vyvinuta řada pravděpodobnostních metod, které umožňují pracovat s náhodnými veličinami. Podmínkou pro jejich úspěšné použití je, že veličina, kterou chceme posuzovat, musí mít stejné rozdělení pravděpodobnosti, jako bylo rozdělení naměřených hodnot. Podmínky jejich získání by měly být v obou případech stejné. To není vždy jisté. Například zkoušky pro získání histogramu pevností podle obr. 6.11 trvaly několik roků. Během tak dlouhé doby mohlo dojít ke změně podmínek práce tavicí pece, a tedy i ke změně vlastností oceli. Jistá opatrnost v podobných případech je pak na místě. Při návrhu ale v prvé řadě potřebujeme informace o rozdělení uvažované veličiny.

Získání informací o rozdělení pravděpodobnosti

První představu poskytne histogram naměřených hodnot (obr. 6.11). Jeho sestavení je snadné s použitím vhodného počítačového programu. Jeden je i součástí Excelu (menu Data → Analýza dat → Histogram); je ale nutno mít předem připravené hranice jednotlivých tříd. Návod je popsán v [Expanal]. Pro rozumné vizuální posouzení by histogram měl být sestaven alespoň ze třiceti hodnot, což pokaždé nemáme. Určitou informaci o distribuční funkci vyšetřovaného rozdělení dá pořadová statistika. Naměřené hodnoty x můžeme seřadit od nejmenší do největší, a každé přiřadit hodnotu distribuční funkce $F(x)$, která vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina x nabude hodnotu menší nebo nanejvýš rovnou x^* . Nejjednodušší předpis pro přiřazení hodnot distribuční funkce je

$$F_i = \frac{i}{n + 1} . \quad (6.3)$$

kde i je i -tá hodnota a n je celkový počet hodnot. Vysvětlení vzorce (6.3) je prosté. Máme-li například 100 hodnot pevnosti (x) a seřadíme je od nejmenší do největší, potom pravděpodobnost F , že pevnost x bude nižší nebo rovna nejnižší z oněch 100 hodnot, tj. x_1 , je přibližně 1 : 100. Pravděpodobnost, že $x \leq x_2$ je 2/100, atd., obecně $F_i = i/n$. V rovnici (6.3) byla ke jmenovateli přičtena jednotka kvůli matematické korektnosti: pravděpodobnost F , že x bude nižší nebo rovna x_n , musí být i pro $i = n$ menší než 1, protože při dalších zkouškách pevnosti by se mohly objevit také hodnoty vyšší než x_n .

Na základě podobných úvah by šlo říci, že chceme-li zjistit například hodnotu, která se vyskytne s pravděpodobností 1:100, měli bychom uskutečnit 100 testů, a tu „jednoprocentní“ hodnotu bychom dostali jako nejnižší z naměřeného souboru. Často stačí i méně zkoušek, zejména pokud víme, že daná veličina má určité rozdělení. V takovém případě vypočítáme z uskutečněných zkoušek parametry tohoto rozdělení, a pro ně vypočítáme příslušný kvantil. Protože ale získaný výsledek není přesný, můžeme ještě stanovit konfidenční interval, který bude s předem zvolenou vysokou pravděpodobností obsahovat skutečnou hodnotu daného kvantilu. Odpovídající postupy jsou popsány např. v [24]. Jistě ale chápeme, že určovat hodnotu, která by se mohla vyskytnout v jednom případě z 10000, pouze na základě tří zkoušek, není příliš přesné, a že odpovídající interval spolehlivosti pro ni bude velmi široký.

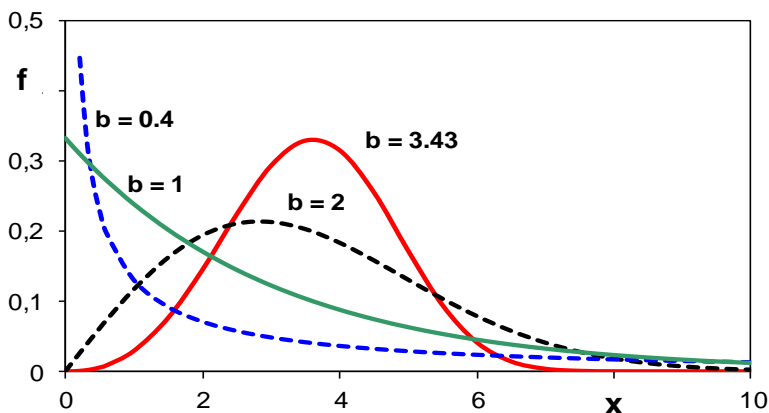
Stanovení parametrů Weibullova rozdělení

Pro aproximaci rozdělení zatížení při poruše, pevností nebo dob do poruchy bývá vhodné Weibullovo rozdělení, které se dokáže pružně přizpůsobit různým tvarům histogramu (obr. 6.12). Zde ukážeme jednoduchou metodu stanovení jeho parametrů [24].

Distribuční funkce pro tříparametrické Weibullovo rozdělení veličiny x je

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^b \right], \quad (6.4)$$

kde a je tzv. parametr měřítka, b je parametr tvaru, a x_0 je tzv. prahová hodnota, což je taková hodnota, že se nemůže vyskytnout nižší. V případě pevnosti nebo



Obr. 6.12. Weibullovo rozdělení (hustota pravděpodobnosti) pro různé hodnoty parametru tvaru b .

životnosti se někdy za x_0 dosazuje 0; jedná se potom o dvouparametrické Weibullovo rozdělení.

Konstanty a , b , x_0 získáme následujícím způsobem. Rovnici (6.4) přepíšeme na tvar

$$x = x_0 + a \ln \left(\frac{1}{1 - F} \right)^{1/b} . \quad (6.5)$$

Nyní všechny hodnoty uspořádáme do sloupců. První sloupec obsahuje pořadové číslo (i), ve druhém jsou naměřené pevnosti $x_{i,\text{meas}}$, seřazené od nejnižší do nejvyšší, a ve třetím sloupci jsou odpovídající hodnoty distribuční funkce F_i , přiřazované podle vzorce (6.3). Ve čtvrtém sloupci budou hodnoty pevnosti $x_{i,\text{calc}}$, počítané pro pravděpodobnosti F_i podle vztahu (6.5) s použitím konstant a , b , x_0 . Jejich hodnoty zatím neznáme, ale získáme je z podmínky, aby byl minimální součet čtverců rozdílů mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami x_i ,

$$\Sigma (x_{i,\text{meas}} - x_{i,\text{calc}})^2 = \min ! \quad (6.6)$$

K tomuto účelu lze užít vhodný řešitel. Jeden je zabudován i v Excelu (Řešitel v menu Data; odpovídající příkaz pro výpočet součtu čtverců rozdílů je SUMXMY2). Na začátku výpočtů musí být zadány zvolené počáteční hodnoty a , b , x_0 a příkaz, aby program Řešitel našel minimum tohoto součtu. Jakmile byly správné hodnoty parametrů nalezeny, můžeme pomocí vzorce (6.5) vypočítat

hledanou pevnost odpovídající pravděpodobnosti (nepřekročení) F . Celý postup je podrobně popsán v příkladu v knížce Úvod do experimentální analýzy [24], která je volně přístupná na webu.

Vztah (6.5) můžeme také použít, chceme-li stanovit například „zaručenou“ minimální hodnotu, tj. takovou, že nižší hodnota se vyskytne nanejvýš se zvolenou pravděpodobností F .

5.4 Vliv rozměrů

Rozměry vzorků, na kterých zjišťujeme pevnostní parametry, se často liší od rozměrů součásti, a někdy je odlišný i způsob zatížení. V takovém případě je nutno výsledky měření přepočítávat, neboť je třeba přihlížet ke skutečnosti, že s rozměry zatížené oblasti roste i pravděpodobnost výskytu větších a nebezpečnějších vad, a pevnost klesá.

Nejjednodušší situace nastává, je-li napjatost ve vzorku i v tělese stejná a liší se pouze velikosti zatížených oblastí, jako například u tyčí zatížených tahem. Způsob přepočítávání pravděpodobnosti budeme v tomto případě ilustrovat na jednoduchém příkladu. Mějme vzorek o objemu V zatížený rovnoměrně rozloženým napětím σ takové velikosti, že pravděpodobnost lomu je P . Pravděpodobnost, že k lomu nedojde, je rovna doplňku do jedné, tzn. $1 - P$. Máme-li nyní vzorek z téhož materiálu, o objemu dvakrát větším, zatížený rovněž napětím σ , potom pravděpodobnost, že k lomu nedojde (tzn. že se ani v dvakrát větším objemu nenajde vada kritické velikosti), je rovna $(1 - P)(1 - P)$. Zobecníme-li tyto úvahy, dostaneme následující pravidlo [26]:

Jestliže pravděpodobnost porušení tělesa o objemu V_1 , zatíženého rovnoměrně rozděleným napětím σ , je P_1 , potom pravděpodobnost lomu stejně zatíženého tělesa o objemu V_2 je

$$P_2 = 1 - (1 - P_1)^{V_2/V_1} . \quad (6.7)$$

Z tohoto vztahu vycházíme i při určování dovoleného napětí. Známe-li rozdělení pevností zkušebních vzorků o objemu V_2 , a chceme pro součást o objemu V_1 stanovit takové dovolené napětí, aby pravděpodobnost lomu této součásti byla P_1 , vypočítáme z (6.7) odpovídající pravděpodobnost P_2 . Dovolené napětí potom stanovíme jako P_2 -kvantil rozdělení pevnosti zkušebních vzorků.

Jednoduché přepočty umožňuje Weibullovo rozdělení. Je-li pravděpodobnost lomu tělesa o objemu V_1 , zatíženého napětím σ , dána vztahem (6.4) s konstantami a , b , x_0 , vyplývá ze vzorce (6.7), že pravděpodobnost lomu stejně zatížené součásti o objemu V_2 bude

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^b \right]. \quad (6.8)$$

Ze vztahu (6.8) plyne, že má-li součást o objemu V_2 mít stejnou pravděpodobnost lomu jako součást o objemu V_1 , musí se zatížení změnit z σ_1 na σ_2 tak, aby platilo

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1/b}. \quad (6.9)$$

Uvedené vztahy platí i pro Weibullovo rozdělení dvouparametrické, položíme-li $\sigma_0 = 0$. Vzorec (6.9) v tomto případě odpovídá často pozorované empirické závislosti mezi pevností a objemem V tělesa

$$\sigma = c V^{-1/b}, \quad (6.10)$$

kde c je konstanta. Pevnost klesá se zvětšováním objemu tím rychleji, čím menší je Weibullův modul b . Někdy musíme brát v úvahu, jsou-li pro pevnost rozhodující povrchové vady nebo vady rozptýlené v objemu tělesa.

6.5 Počítačová podpora navrhování

Při navrhování součástí poskytují výraznou pomoc různé počítačové programy, jako je například ProEngineer nebo Inventor od firmy Autodesk [27]. Posledně jmenovaný obsahuje kromě jiného generátor tvarů, který používá proceduru pro maximalizaci tuhosti součásti na základě zvolených či předepsaných vazeb. Tento generátor vytvoří 3D síť, kterou lze použít jako vodítko pro upřesnění návrhu, a to jak pro ohýbané součásti z plechu, tak i pro plastové součásti vytvářené vstřikováním. Procedura Generátor tvarů je do programu Inventor integrována, díky čemuž se může snadno stát přímo součástí návrhu. Nejlepší je použít ji již v koncepční nebo počáteční fázi návrhu.

Účinným pomocníkem při analýze deformací a napětí je software umožňující modelování, pokud možno i při velkých deformacích. Příkladem jsou programy

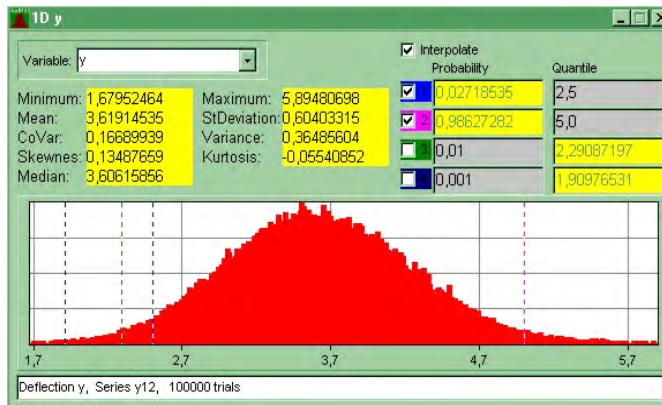
metody konečných prvků, například ANSYS, ABAQUS, MARC nebo COSMOS [28 – 34]. Bližší informace o nich získáme z příslušných webových stránek a příruček v nich citovaných.

Náhodné vlivy lze zkoumat použitím simulační metody Monte Carlo. Jedná se o počítačovou techniku, založenou na provádění četných fiktivních experimentů s použitím náhodných čísel [27, 35 – 37]. Její použití je univerzální a nevyžaduje speciální znalosti teorie pravděpodobnosti. Uživatel potřebuje pouze znát vztah mezi vstupními veličinami a výstupem,

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad (6.11)$$

a rozdělení pravděpodobnosti vstupních veličin (x_1, x_2, x_3, \dots). Metoda Monte Carlo používá při řešení náhodná čísla vytvářená počítačem. V každém „pokusu“ se vstupním veličinám x_1, x_2, \dots, x_n přiřadí náhodná čísla, taková, že jejich rozdělení odpovídají rozdělení pravděpodobnosti každé proměnné. S těmito čísly se pak provedou operace odpovídající řešenému problému a podle rovnice (6.11) se vypočítá hodnota zkoumané veličiny y . Z mnoha hodnot lze potom vytvořit histogram, který odpovídá rozdělení y (obr. 6.13).

Vygenerované hodnoty lze užít pro výpočet střední hodnoty anebo pravděpodobnosti, že y bude nižší nebo vyšší než určitá zvolená hodnota y^* , pro výpočet pravděpodobnosti poruchy, anebo pro určení hodnot, které budou překročeny jenom s určitým rizikem, například maximální očekávané zatížení



Obr. 6.13. Histogram vytvořený metodou Monte Carlo, program Ant-Hill [24].

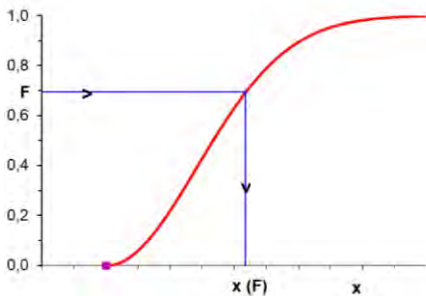
nebo deformace. Metoda je vhodná zejména je-li vztah mezi vstupními veličinami a výstupem nelineární, což je mj. případ stabilitních problémů.

Pro simulace Monte Carlo existují komerční počítačové programy, ale také lze vytvořit si vlastní. Jejich základem je generátor náhodných čísel. Ve skutečnosti tato čísla nejsou zcela náhodná, protože se tvoří podle určitého algoritmu. Komerční generátory však používají algoritmy, které prošly důkladnými statistickými testy, a poskytují čísla, která se chovají téměř jako úplně náhodná. Proto je výhodné používat osvědčené generátory náhodných čísel. Ty bývají i součástí univerzálních počítačových programů, jako je Matlab nebo Mathcad. Také Excel má svůj generátor, avšak s omezenými možnostmi.

Základem bývá generátor náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením v intervalu (0; 1). Z nich lze získat náhodná čísla s jiným rozdělením pravděpodobnosti. Základní myšlenkou je, že distribuční funkce F jakékoliv spojitě náhodné proměnné je také náhodná veličina, a to s rovnoměrným rozdělením v intervalu (0; 1). Známe-li obecný výraz pro distribuční funkci požadovaného rozdělení, $z = F(x)$, potom náhodná čísla x lze získat z náhodných čísel z s rovnoměrným rozdělením v intervalu (0; 1) použitím inverzní transformace (obr. 6.14):

$$x = F^{-1}(z). \quad (6.12)$$

Například distribuční funkce exponenciálního rozdělení je $z = F(x) = 1 - \exp(-x/x_0)$ s parametrem x_0 . Inverzní transformace pro toto rozdělení je $x = -x_0 \ln(1 - z)$.



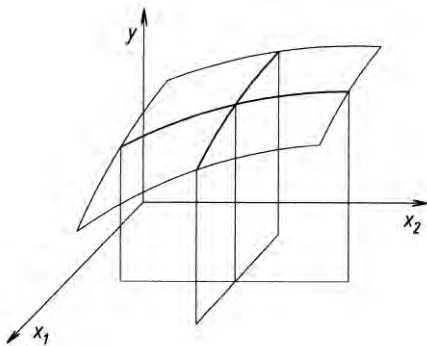
Obr. 6.14. Princip vytváření náhodných čísel z čísel s rovnoměrným rozdělením.

Typickým rysem metody Monte Carlo je, že charakteristické hodnoty (průměr, kvantily, pravděpodobnosti odpovídající určitým hodnotám y , atd.), získané jako výsledek n pokusů, nejsou ve dvou sériích simulací nikdy stejné. Výsledky jsou

tedy jen přibližně. Jsou ale blíže ke skutečným hodnotám při vyšším počtu pokusů. Počet pokusů n , potřebný pro dosažení určité přesnosti výsledků, je přibližně

$$n = u_{\alpha/2}^2 (1 - P) / (P\delta^2) ; \quad (6.13)$$

P je očekávaná (odhadnutá) pravděpodobnost vyšetřovaného jevu, δ je přípustná relativní chyba při určení P , a $u_{\alpha/2}$ je $\alpha/2$ -kritická hodnota normovaného normálního rozdělení pro pravděpodobnost α , že skutečná hodnota P bude vně intervalu $P \pm \delta$. Nezbytný počet simulací výrazně narůstá s klesající pravděpodobností P . Je-li například předpokládaná pravděpodobnost $P = 0,01$, dovolená relativní chyba $\delta = 10\%$ a pravděpodobnost $\alpha = 5\%$, bude zapotřebí asi 40 000 simulačních pokusů. Pro $P = 0,001$ to již je 400 000 pokusů atd. To může být někdy velice časově náročné, zejména je-li pro získání hodnoty y (deformace konstrukce apod.) nutno uskutečnit výpočty metodou konečných prvků, kdy jeden propočet trvá několik minut. Proto byly navrženy různé modifikace. Jednou z nich je metoda odezvové plochy. Při ní se přesné výpočty (MKP apod.) uskuteční jenom pro několik vybraných kombinací vstupních parametrů. Získané výsledky se pak proloží vhodnou funkcí, takzvanou odezвовou plochou (obr. 6.15).



Obr. 6.15. Odezвовá plocha pro funkci dvou nezávisle proměnných.

To je spojitá funkce, například polynom, a vlastní simulace pro náhodně kolísající hodnoty vstupních veličin se pak provádějí s touto odezвовou plochou [24, 35].

Více úvodních informací o metodě Monte Carlo lze najít například v knize [35], která je volně dostupná na webu.

Literatura ke kapitole 6.

1. Čalkovský, A.: Tenkostěnné konstrukce I. Stavba strojů 75. DT ČSVTS, Praha, 1980. 134 s.
2. Čalkovský, A.: Tenkostěnné konstrukce II. Stavba strojů 81. DT ČSVTS, Praha, 1982. 120 s.
3. Čalkovský, A.: Tenkostěnné konstrukce III. Stavba strojů 87. DT ČSVTS, Praha, 1983. 128 s.
4. Čalkovský, A.: Tenkostěnné konstrukce IV. Stavba strojů 101. DT ČSVTS, Praha, 1985. 124 s.
5. Čalkovský, A.: Únosnost tenkostěnných konstrukcí. Stavba strojů 94. DT ČSVTS, Praha, 1984. 130 s.
6. Megson, T. H. G.: Aircraft Structures for Engineering Students. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2016. 910 s.
7. Bushnell, D.: Computerized buckling analysis of shells. Martinus Nijhoff Publishers. Dordrecht, 1985. ISBN 90-247-3099-6.
8. Peery, D. J.: Aircraft Structures. Dover Publications, Mineola, 2011. (McGraw-Hill, New York, 1950) 566 s.
9. Lizin, V. T., Pjatkin, V. A.: Projektirovanije tonkostěnných konstrukcij. 2. vyd. Mašinostrojenije, Moskva, 1985. 344 s.
10. Schneider, P.: Základy konstruování procesních zařízení. VUT, Brno, 1999. 183 s.
11. Placák, V., Kunc, J.: Výpočet napjatosti skořepin. SNTL, Praha, 1966.
12. Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer-Verlag, Berlin, 1962. 312 s.
13. Vlasov, V. Z.: Obščaja teorija oboloček i jejo priloženija v technike. GITTL, Moskva, 1949. 784 s.
14. Volmir, A. C.: Gibkije plastinki i oboločki. GOSIZDAT techniko-teoretičeskoj literatury. Moskva, 1957.
15. ČSN 73 1401. Navrhování ocelových konstrukcí. Česká norma. Český normalizační institut. 1994. 140 s. Také jako: EN 1993. Eurocode: Design of Steel Structures.

16. ČSN 73 1401. Navrhování ocelových konstrukcí. Česká technická norma. Český normalizační institut, 1998. 134 s.
17. ČSN EN 13445-3. Netopené tlakové nádoby: Část 3 – konstrukce a výpočet. Český normalizační institut, 2008.
18. ČSN EN 1993-1-6. Navrhování ocelových konstrukcí – Pevnost a stabilita skořepinových konstrukcí. Český normalizační institut, 2008.
19. ECCS Buckling of Steel Shells. European Design Recommendation. Fifth Edition. Published by ECCS, 2008.
20. European Recommendation for Steel Construction. Section 10. Cylindrical shells of constant wall thickness under general loading. ECCS TC8 TWG 8.4. 2008, pp. 167 – 216.
21. European Recommendation for Steel Construction. Section 20. Saddle or ringsupported cylindrical shells. ECCS TC8 TWG 8.4. 2008, pp. 371 – 382.
22. Park, Jongmin et al.: Numerical Prediction of Equivalent Mechanical Properties of Corrugated Paperboards by 3D Finite Element Analysis. Foods 2020, 9. (in print).
23. Menčík, J.: Aplikovaná mechanika materiálů. Univerzita Pardubice, 2019. 196s. Volně dostupná na: <https://dk.upce.cz/handle/10195/72947> nebo přes <https://eshop.upce.cz>
24. Menčík, J.: Úvod do experimentální analýzy. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2017. 142 s. Volně přístupná na <http://hdl.handle.net/10195/66960> nebo přes: <http://e-shop.upce.cz>
25. Mrázik, A.: Teória spoľahlivosti ocelových konštrukcií. Veda, vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1987. 360 s.
26. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. XXV s.
27. <http://help.autodesk.com/view/INVENTOR/2016/CSY/?guid=GUID-F367DA16-A76E-4658-A979-ED7317FF3AF4> .
28. FEM Computer program ANSYS 11. Ansys Corporation.
29. FEM Computer program COSMOS Works 2010. Advanced Professional. SolidWorks Corporation.
30. FEM Computer program COSMOS/M, version 2.95, 2010.
31. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>

32. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaqusexplicit/>
33. <https://www.mscsoftware.com/product/marc>
34. <https://www.mscsoftware.com/product/msc-one>
35. Menčík, J.: Concise Reliability for Engineers. InTech, Rijeka, 2016. 204 s. Volně dostupné na <https://www.intechopen.com/books/concise-reliability-for-engineers> nebo na <https://dk.upce.cz/handle/10195/65911?show=full>
36. Marek, P., Brozzetti, J., Guštar, M., Tikalsky, P.: Probabilistic Assessment of structures. ITAM, CAS CR, Prague, 2001, 2003. 472 s.
37. <http://www.noise.cz/SBRA/software.html>
38. Gorbатов, N., Valenta, J.: Statika skořepin a skořepinových konstrukcí. SNTL, Praha, 1972. 572 s.
39. Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL, Praha, 1989. 600 s.

Rejstřík (číslo v závorce značí kapitolu)

analýza lineární, nelineární	82 (4)
antideplanátory	34 (2), 100 (6)
bezrozměrové veličiny, parametry	101, 102 (6)
bifurkace	81 (4)
Bredtovy vztahy	13 (1)
čára průhybová	27 (1)
čísla náhodná	110, 111 (6)
deformace velké	82 (4)
delaminace povlaku s horkou skvrnou	90 (5)
délka vzpěrná	60 (4)
deplanace (ztráta rovinnosti průřezu)	16 (1)
desky	38 (3)
desky kruhové, vyboulení	71 (4)
desky ortotropní	36 (3)
diferenciální rovnice průhybové čáry	27 (1), 59 (4)
histogram (pevnosti)	104 (6)
hlavní směry a hlavní osy průřezu	20, 24 (1)
hodnoty kritické	59 (4)
Hookeův zákon	35, 38 (3), 89 (5)
Hookeův zákon s vlivem teplot	89 (5)
horká skvrna (delaminace)	90 (5)
imperfekce	62 (4)
kritická teplota pro boulení	85, 87 (5)
kritické napětí	61, 62, 68, 69, 70 (4)
kritické zatížení	59, 63, 65, 67 (4)
kritický tlak pro boulení	76, 77, 78, 80 (4)
kroucení volné, stísněné (vázané)	16, 17 (1), 30 (2)
krut, kroucení	9 (1)
kružnice Culmannova	24 (1)
Laplaceova rovnice membrány	43 (3)
lepenka vlnitá	40 (3), 96 (6)
lineární analýza	82 (4)
membrána	42 (3)

membránová analogie	11 (1)
měřítko	103 (6)
metoda konečných prvků	55 (3), 81 (4)
metoda Monte Carlo	100 (5)
mezní křivka	62 (4)
modul průřezu v krutu	10, 13, 14, 16 (1)
modul průřezu v ohybu	17, 18 (1)
modul pružnosti v tahu E (Youngův)	10 (1), 35 (3)
modul pružnosti ve smyku G	10 (1), 35 (3)
moment deviační	19 (1)
moment ohybový, jednotkový m. u desek	17 (1), 36 (3)
moment setrvačnosti (kvadratický) průřezu	17, 21, 24 (1)
moment tuhosti v kroucení	13, 14, 16 (1)
momenty průřezu k pootočeným osám	24 (1)
momenty průřezu k posunutým osám	23 (1)
nádoby rotačně symetrické	46 (3)
napětí kritické	61, 62, 67, 69 (4)
napětí teplotní	85 (5)
napětí teplotní při spádu teplot	86, 87, 88 (5)
napětí teplotní v desce	87, 89 (5)
napětí teplotní v trubce	92 (5)
napětí teplotní v tyči	86, 91 (5)
napětí membránové	42 (3)
napětí obvodové, osové	44 (3)
napětí ohybové	17 (1), 42 (3)
napětí smykové	9, 11, 13, 24, 25 (1)
napětí ve skořepinách	48 (3)
napjatost membránová	43, 48, 51 (3)
napjatost ohybová	49 (3)
normy pro navrhování	101 (6)
ohyb	17 (1)
plocha odezvovalá	112 (6)
počítačová podpora navrhování	109 (6)
podobnost	101 (6)
Poissonovo číslo μ	10 (1), 38 (3)
pokritické chování	80 (4)

poloměr setrvačnosti průřezu	61 (4)
pravděpodobnostní hlediska návrhu	104 (6)
průhyb nosníku, průhybová čára	27, 28 (1), 35 (3)
průhyb při imperfekci	62, 63 (4)
rozdělení pravděpodobnosti	104, 105 (6)
rozdělení pravděpodobnosti Weibullovo	106, 107 (6)
sendvič, napjatost, prvky	39 (3), 78 (4), 95 (6)
simulační metody	110 (6)
skořepina tenkostěnná kulová	47 (3), 80 (4)
skořepina tenkostěnná válcová	44 (3)
skořepina válcová, ztráta stability	73, 76 (4)
skořepiny zatížené vnějším přetlakem	76, 77 (4)
skořepiny	42, 43, 48, 49 (3)
stabilita kruhového oblouku, prstence	77, 76 (4)
stabilita L-profilu	71, 72 (4)
stabilita prutů	59, 60 (4)
stabilita trubky zatížené vnějším tlakem	76, 77, 78 (4)
stabilita válcové skořepiny	73, 74 (4)
Steinerova věta	23 (1)
stěna integrální	99 (6)
střed smyku	26 (1)
štíhlostní poměr tyče (prutu) λ	61 (4), 85 (5)
tenkostěnné profily uzavřené, otevřené	13, 14 (1)
teplota kritická pro boulení	85 (5), 87
teplotní deformace	85, 86 (5)
teplotní napětí	85 (5)
teplotní napětí při spádu teplot	86, 87, 88 (5)
teplotní napětí v tyči	86 (5), 91
teplotní napětí v desce	87, 89 (5)
teplotní napětí v trubce	92 (5)
teplotní roztažnost	85 (5)
těžiště průřezu	23 (1)
tlak kritický (vnější)	78 (4)
tuhost ohybová	36 (3)
úhel pootočení dvou průřezů	10 (1), 32 (2)
úhel sklonu konce nosníku	28 (1)

vlastní tvary	82 (4)
vliv rozměrů na únosnost	108 (6)
vrchlík kulový	81 (4), 98 (6)
vybočení nosníku, prutu	65, 66, 67 (4)
vyztužování skořepin a žeber	97, 98 (6)
vzorce kotlové	45, 54 (3)
vzpěrná délka	85 (5)
Weibullovo rozdělení, určení parametrů	106, 107 (6)
zatížení excentrické	64 (4)
zatížení kritické	59, 63, 69 (4)
zborcení desek, skořepin	68, 72, 74 (4)
zesílení skořepiny s lokálním zatížením	96, 97 (6)
zkrut (relativní pootočení průřezů, d/dx)	10 (1), 37 (3)
ztráta stability desek	68 (4)
ztráta stability lokální	65 (4)
ztráta stability skořepin	73, 74 (4)
ztráta stability účinkem smykových napětí	67, 68 (4)
žebra integrální	97, 99 (6)
žebra výztužná	79 (4), 98 (6)

Název: Úvod do aplikované mechaniky tenkostěnných konstrukcí
Autor: prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc.
Vydavatel: Univerzita Pardubice
Do tisku: červen 2020
Stran: 120
Náklad: 30
Vydání: první
Tisk: Polygrafické středisko Univerzity Pardubice

Tato publikace neprošla jazykovou korekturou.

ISBN 978-80-7560-297-8 (tištěná verze)

ISBN 978-80-7560-298-5 (elektronická verze)

Elektronická verze je volně přístupná na <https://eshop.upce.cz/epub/9006160/>

ISBN 978-80-7560-298-5 (pdf)